

ÉCOLE DE TECHNOLOGIE SUPÉRIEURE  
UNIVERSITÉ DU QUÉBEC

MÉMOIRE PRÉSENTÉ À  
L'ÉCOLE DE TECHNOLOGIE SUPÉRIEURE

COMME EXIGENCE PARTIELLE  
À L'OBTENTION DE LA  
MAÎTRISE EN GÉNIE MÉCANIQUE  
M.Eng.

PAR  
YOUSSEF BOUCHRA

CONTRIBUTION AU DÉVELOPPEMENT ET À LA VALIDATION D'UN CODE  
D'ÉLÉMENTS FINIS POUR DES PROBLÈMES D'ÉLASTO-ACOUSTIQUE

MONTREAL, LE 22 DÉCEMBRE 2003

© droits réservés de Youssef Bouchra

CE PROJET A ÉTÉ ÉVALUÉ  
PAR UN JURY COMPOSÉ DE :

M. Azzeddine Soulaïmani, directeur de mémoire  
Département de génie mécanique à l'École de technologie supérieure

M. Frédéric Laville, président de jury  
Département du génie mécanique de l'École de technologie supérieure

M. Marius Paraschivoiu  
Département de génie mécanique et industriel, Université Concordia

IL A FAIT L'OBJET D'UNE PRÉSENTATION DEVANT JURY  
LE 15 DÉCEMBRE 2003  
À L'ÉCOLE DE TECHNOLOGIE SUPÉRIEURE

# **CONTRIBUTION AU DÉVELOPPEMENT ET À LA VALIDATION D'UN CODE D'ÉLÉMENTS FINIS POUR DES PROBLÈMES D'ÉLASTO-ACOUSTIQUE**

Youssef Bouchra

## **SOMMAIRE**

Les prévisions du bruit rayonné par une structure vibrante à partir de données calculées ou mesurées intéressent de nombreux industriels, qui dès le stade de la conception, peuvent prévoir, analyser et éventuellement corriger les nuisances sonores engendrées par un objet vibrant. Grâce aux récents développements des moyens numériques, les travaux de recherche dans les domaines liés à l'acoustique ont fortement progressé. Ils ont conduit à des logiciels de calcul basés sur les méthodes des éléments finis «MEF» ou des Éléments Finis de Frontière «BEM» qui nécessitent cependant des investissements importants : calculateurs puissants et utilisateurs avertis.

Le présent travail consiste en l'étude du comportement «élastoacoustique» d'une structure avec un milieu fluide environnant, représenté généralement par l'air ou l'eau. Du point de vue purement physique, ce problème est représenté par deux entités mécaniques qui interagissent entre elles lors de leur évolution. Plus précisément, le mouvement de la structure est influencé par les ondes acoustiques qui exercent des efforts qui lui sont transmis via l'interface, et réciproquement, le mouvement de la structure influence l'état du fluide par les déplacements transversales de l'interface qui par la suite engendrent des perturbations dans le fluide. Ainsi, la partie fluide du système élastoacoustique, dans le cas du problème extérieur de Helmholtz, sera délimitée par une frontière absorbante sur la quelle nous imposons une condition de type Dirichlet to Neumann «DtN». Elle remplace la condition de rayonnement de Sommerfeld. Cette représentation nous a permis de résoudre numériquement le problème d'interaction par FEM après avoir entouré la structure rayonnante par une frontière artificielle positionnée à une distance bien définie de celle-ci. Par ailleurs, cette nouvelle approche a été mise au point sous forme d'un code "Helmholtz" 2D et 3D. Nous avons aussi adapté le code Matcher du groupe GRANIT pour élaborer le code "Rayonnement" capable de solutionner les problèmes d'élastoacoustique.

La résolution numérique nous a permis de déterminer non seulement le champ de pression du fluide environnant mais aussi le champ de déplacement transversal de la structure rayonnante. Différents cas de tests sont traités pour le cas de rayonnement rigide et élastique en 3D.

# **CONTRIBUTION TO THE DEVELOPMENT AND VALIDATION OF A FINITE ELEMENT METHOD CODE FOR ELASTO-ACOUSTIC PROBLEMS**

Youssef Bouchra

## **ABSTRACT**

The prediction of sound radiated by a vibrating structure using measured or calculated data is of interest in many industries, because it allows predicting, analyzing and correcting the harmful sound effects generated by a source. Numerical methods for solving acoustical radiation problems such as the Finite Element Method «FEM» or the Boundary Element Method «BEM» have been developed but still face numerical difficulties in 3D and for high frequencies.

This work deals with the finite element analysis of acoustic fluid-structure interaction. From the physical point of view, this problem is represented by two mechanical subsystems which interact during their evolution. More precisely, the movement of the structure is influenced by the acoustic waves which exert efforts through the interface. Reciprocally, the movement of the structure influences the state of the fluid by the displacements of the interface which involves the fluid in its movement.

The fluid domain is replaced by an effective absorbing boundary Dirichlet to Neumann «DtN» for the exterior acoustical problem. This enables to numerically solve the coupled problem by FEM after having surrounded the scatterer by an artificial boundary positioned at a well defined distance of the radiant surface.

In addition, this new approach is coded for 2D and 3D Helmholtz problems. We also adapted the Matcher code of the GRANIT group to the later one; therefore we obtain "Rayonnement" code which enables to solve elastoacoustical problems.

The numerical resolution determines not only the pressure field of the surrounding fluid but also the displacement field of the radiating structure.

Various test cases have been treated for the rigid and elastic radiation case in 3D.

## REMERCIEMENTS

J'adresse mes remerciements les plus profonds à mon directeur de projet Monsieur Azzeddine Soulaïmani, professeur au département de génie mécanique de l'ETS. En plus de m'avoir permis d'entreprendre la présente recherche, il m'a donné la grande satisfaction et l'honneur de partager ses connaissances et son amitié. Je n'oublierai pas ses conseils attentionnés et ses interventions rapides et avisées qui m'ont guidé le long de ce travail.

Je remercie vivement Monsieur Frédéric Laville, professeur au département de génie mécanique de l'ETS, pour sa collaboration, son soutien et ses conseils pendant ce travail. Je suis très honoré qu'il ait accepté de présider le jury. Je remercie également M. Marius Paraschivoiu d'avoir l'aimabilité de faire part du jury.

Je tiens à remercier le Dr. Riad Kechroud, chercheur post-doctoral au sein du groupe GRANIT de l'ETS, avec qui j'ai eu la chance de collaborer. Je n'oublierai pas son amitié et nos intéressantes discussions au cours de ce projet.

Je n'oublierai pas non plus tous mes collègues du laboratoire GRANIT qui ont rendu si agréable la période que j'ai passée avec eux.

Je dédie tout particulièrement ce travail à toute ma famille : ma mère M.Habiba, mon père B.Mohamed, mes sœurs et leurs époux, mes frères et leurs épouses, leurs enfants, et mes frères Khalil et Hichame.

## TABLE DES MATIÈRES

	Page
SOMMAIRE .....	iii
ABSTRACT .....	iv
REMERCIEMENTS .....	v
TABLE DES MATIÈRES.....	vi
LISTE DES TABLEAUX.....	ix
LISTE DES FIGURES .....	xi
LISTE DES ABRÉVIATIONS ET DES SIGLES .....	xiii
INTRODUCTION.....	1
CHAPITRE 1 ACOUSTIQUE LINEAIRE.....	7
1.1 Approche physique.....	7
1.2 Équations fondamentales.....	9
1.2.1 Équations d'équilibre.....	9
1.2.2 Équations constitutives.....	9
1.2.2.1 Loi de comportement.....	9
1.2.2.2 Loi d'état .....	10
1.3 Hypothèses de l'acoustique .....	11
1.3.1 Hypothèse des équations linéaires.....	11
1.3.2 Équations linéaires.....	11
1.3.2.1 Quantité de mouvement.....	12
1.3.2.2 Équation de continuité linéarisée.....	12
1.3.2.3 Équation d'état.....	13
1.4 Équation d'onde.....	13
1.5 Équation de Helmholtz.....	14
CHAPITRE 2 DIFFRACTION D'ONDES ACOUSTIQUES .....	16
2.1 Préambule .....	16
2.2 Formulation du problème de propagation des ondes acoustique.....	19
2.3 Formulation variationnelle du problème de Helmholtz.....	22
2.3.1 Domaine borné .....	22
2.3.1.1 Formulation faible .....	22
2.3.1.2 Discrétisation par éléments finis du problème intérieur HI.....	25
2.3.2 Domaine infini.....	26
2.3.2.1 Décomposition du domaine extérieur.....	26
2.3.2.2 Existence et unicité de la solution .....	29
2.3.2.3 Conditions aux limites sur la frontière artificielle.....	29

2.3.2.4	Conditions DtN en 2D .....	33
2.3.2.5	Formulation faible du problème tronqué de Helmholtz en 2D.....	36
2.3.2.6	Discrétisation en E.F. du problème extérieur de Helmholtz tronqué .....	38
2.3.2.7	Système d'équations.....	39
2.3.2.8	Formulation de GLS du problème de Helmholtz .....	40
CHAPITRE 3 PROBLÈME EXTÉRIEUR DE HELMHOLTZ EN 3D.....		42
3.1	Définition du problème.....	42
3.2	Formulation dans un domaine borné .....	43
3.3	Forme variationnelle.....	44
3.4	Implémentation de la condition de second ordre de BGT .....	45
3.5	Système d'équations .....	54
CHAPITRE 4 STRUCTURES ÉLASTO-DYNAMIQUES .....		56
4.1	Mécanique des solides élastiques .....	56
4.1.1	Équation d'équilibre .....	56
4.1.2	Loi de comportement.....	56
4.1.3	Relation déformation-déplacement .....	57
4.1.4	Équation d'équilibre modifiée .....	57
4.1.5	Décomposition de Helmholtz vectorielle .....	58
4.2	Formulation faible du problème structural traité en temporel.....	60
4.3	Discrétisation en éléments finis.....	61
4.4	Système d'équations.....	62
4.5	Analyse modale pour le calcul du déplacement .....	62
CHAPITRE 5 COUPLAGE ÉLASTO-ACOUSTIQUE.....		65
5.1	Position du problème.....	65
5.2	Problème harmonique.....	66
5.2.1	Hypothèses physiques .....	66
5.2.2	Conditions à l'interface .....	68
5.2.3	Condition dynamique .....	69
5.2.4	Condition cinématique.....	70
5.3	Équations gouvernantes.....	71
5.4	Formulation faible du couplage élastoacoustique .....	74
5.5	Discrétisation par éléments finis .....	75
5.6	Algorithme de résolution itératif .....	77
CHAPITRE 6 RÉOLUTION NUMÉRIQUE DES ÉQUATIONS DE COUPLAGE .		80
6.1	Techniques de résolution des équations fluides .....	80
6.1.1	Méthode de résolution .....	80
6.1.2	Calcul analytique du paramètre $\hat{\tau}$ .....	84
6.1.3	Méthode proposée de calcul du paramètre $\hat{\tau}$ .....	85
6.2	Quelques aspects d'implémentation .....	86
6.2.1	Résolution des équations de la structure .....	86

6.2.2	Résolution des équations de couplage.....	86
6.2.3	Exploitation du Matcher .....	87
CHAPITRE 7 TESTS NUMÉRIQUES I VALIDATION DU CODE HEL. 3D.....		90
7.1	Champ lointain des sources circulaires et rectangulaires .....	90
7.2	Test I.1 : Champs lointain du piston circulaire bafflé .....	91
7.2.1	Validation et étude de l'influence de la discrétisation.....	93
7.2.2	L'influence de l'emplacement de la frontière artificielle .....	97
7.3	Test 2 : Champ lointain d'une source rectangulaire bafflée.....	104
7.3.1	Validation et étude de l'influence de la discrétisation.....	105
7.3.2	Influence de l'emplacement de la frontière artificielle.....	109
7.4	Test I.3 : Champ d'une sphère pulsante .....	115
7.4.1	Validation et étude de l'influence de la discrétisation.....	117
7.4.2	Influence de l'emplacement de la frontière artificielle.....	120
7.5	Conclusion.....	125
CHAPITRE 8 TESTS NUMÉRIQUES II RAYONNEMENT D'UNE PLAQUE .....		128
8.1	Influence du nombre de nœuds structures de l'interface.....	131
8.2	Influence de l'emplacement de la frontière artificielle.....	133
8.3	Influence du nombre de nœuds fluides de l'interface.....	136
8.4	Résultats concernant l'emplacement optimal .....	137
8.4.1	Nœuds de l'interface.....	137
8.4.2	Nœuds du domaine fluide.....	139
8.5	Conclusion.....	142
CONCLUSION GÉNÉRALE .....		145
ANNEXES :		
1 :	Condition de rayonnement de sommerfeld.....	147
2 :	Forme bilineaire.....	161
3 :	Expression analytique du déplacement d'une psa .....	164
4 :	Formule de rayleigh pour les sources planes.....	169
6 :	Champ lointain des sources planes.....	184
7 :	Formulaire mathématiques .....	194
BIBLIOGRAPHIE .....		199



## LISTE DES TABLEAUX

	Page
Tableau I	Données concernant le solveur et le préconditionneur..... 93
Tableau II	Caractéristiques des tests de discrétisation du PC pour $R_{FA} = 1$ ..... 94
Tableau III	Erreur $L_2$ sur $\  p \ $ du PC pour un même emplacement..... 94
Tableau IV	Erreur $L_2$ sur $\  p \ $ du PC avec le schéma GLS..... 96
Tableau V	Caractéristiques des maillages du PC pour la même "résolution" ..... 98
Tableau VI	Erreur $L_2$ sur $\  p \ $ du PC avec GLS pour une même résolution..... 98
Tableau VII	Caractéristiques du test du PC pour la FA optimal $R_{FA} = 0.5$ ..... 102
Tableau VIII	Résultats du test du PC pour la FA optimal $R_{FA} = 0.5$ ..... 102
Tableau IX	Caractéristiques des tests de discrétisation du PR pour $R_{FA} = 1$ ..... 106
Tableau X	Erreur $L_2$ sur $\  p \ $ du PR pour différentes fréquences..... 106
Tableau XI	Erreur $L_2$ sur $\  p \ $ du PR pour différentes résolutions..... 108
Tableau XII	Caractéristiques des maillages du PR pour la même "résolution" ..... 110
Tableau XIII	Erreur $L_2$ sur $\  p \ $ du PR avec GLS pour une même résolution. .... 110
Tableau XIV	Caractéristiques du test du PR pour la FA optimal $R_{FA} = 0.4$ ..... 113
Tableau XV	Résultats du test du PR pour la FA optimal $R_{FA} = 0.4$ ..... 114
Tableau XVI	Caractéristiques des tests de discrétisation de la SP pour $R_{FA} = 1$ ... 117
Tableau XVII	Erreur $L_2$ sur $\  p \ $ de la SP pour une même FA..... 118
Tableau XVIII	Erreur $L_2$ sur $\  p \ $ de la SP pour une même FA..... 119
Tableau XIX	Caractéristiques des maillages de la SP pour la même "résolution" . 121
Tableau XX	Erreur $L_2$ $\  p \ $ de la SP avec GLS pour une même résolution..... 121
Tableau XXI	Caractéristiques du test de l'emplacement optimal $R_{FA} = 0.2$ ..... 123
Tableau XXII	Résultats du test de la SP pour l'emplacement optimal $R_{FA} = 0.2$ .. 124

Tableau XXIII	Données principales du test de couplage fluide-structure .....	131
Tableau XXIV	Paramètres concernant le solveur, le préconditionneur, le couplage.	131
Tableau XXV	Influence du NN structures sur la précision pour $R_{FA} = 0.6$ .....	132
Tableau XXVI	Caractéristiques des maillages de PSA pour la même "résolution" ..	134
Tableau XXVII	Erreur $L_2 \  p \ $ de la PSA pour différentes fréquences .....	134
Tableau XXVIII	Erreur $L_2$ de $\  p \ $ en fonction du NNI fluides pour $R_{FA} = 0.5$ .....	137
Tableau XXIX	NNI fluides et structures pour l'emplacement optimal $R_{FA} = 0.6$ ...	138
Tableau XXX	Erreur $L_2$ sur $u_z$ des nœuds structures et fluides pour $R_{FA} = 0.6$ .....	138
Tableau XXXI	Caractéristiques du test du FA optimal $R_{FA} = 0.6$ de la PSA .....	140
Tableau XXXII	Résultats du test du FA optimal $R_{FA} = 0.6$ de la PSA .....	140

## LISTE DES FIGURES

	Page
Figure 1	Modèle de configuration géométrique de la propagation d'onde..... 19
Figure 2	Géométrie formulant le problème extérieur ..... 26
Figure 3	Troncature du domaine de calcul..... 27
Figure 4	Domaine de calcul du problème extérieur de Helmholtz. .... 33
Figure 5	Domaine tronqué en 2D du Problème HE où la FA est un cercle ..... 36
Figure 6	Diffraction d'un objet entouré d'un fluide en 3D ..... 42
Figure 7	Domaine tronqué en 3D du Problème HE où la FA est une sphère ..... 43
Figure 8	Représentation paramétrique de $S_R$ au point P ..... 46
Figure 9	Notations ayant traits à l'approximation de l'opérateur de courbure $\Lambda$ . .... 53
Figure 10	Configuration générale du problème d'interaction fluide structure ..... 66
Figure 11	Repère orthonormé local..... 69
Figure 12	Configuration du problème d'élastoacoustique ..... 72
Figure 13	Algorithme séquentiel : interaction fluide-structure..... 86
Figure 14	Exploitation du code matcher ..... 89
Figure 15	Piston circulaire bafflé..... 92
Figure 16	Présentation géométrique du piston circulaire et de la FA par GID..... 93
Figure 17	Erreur $L_2$ du PC en fonction de la fréquence ( $r_0=0.1$ et $R_{FA}=1$ ) ..... 95
Figure 18	Variation de $L_2$ du PC en fonction de la résolution ..... 97
Figure 19	Variation de $L_2$ du PC en fonction de la fréquence. .... 100
Figure 20	Variation de $L_2$ du PC en fonction de l'emplacement de la FA ..... 101
Figure 21	Tracé de $L_w$ , $\sigma$ , $L_2$ et CPU en fonction de $\lambda/r_0$ pour le PC..... 103
Figure 22	Piston rectangulaire bafflé..... 104
Figure 23	Présentation géométrique du PR et de la FA par GID..... 105
Figure 24	Erreur $L_2$ du PR selon la fréquence ..... 107
Figure 25	Variation de $L_2$ du PR selon l'emplacement de FA..... 109
Figure 26	Variation de $L_2$ du PR en fonction de la fréquence ..... 111

Figure 27	Variation de $L_2$ du PR en fonction de l'emplacement de FA.....	113
Figure 28	Tracé de $L_w, \sigma, L_2$ et CPU en fonction de $\lambda/l$ pour le PR .....	114
Figure 29	Sphère pulsante.....	115
Figure 30	Présentation géométrique de la SP et de la FA par GID.....	116
Figure 31	Erreur $L_2$ de la SP avec GLS selon la fréquence ( $r_0 = 0.1$ et $R_{FA} = 1$ ).....	119
Figure 32	Variation de $L_2$ de la SP en fonction de la résolution.....	120
Figure 33	Variation de $L_2$ de la SP en fonction de la fréquence .....	122
Figure 34	Variation de $L_2$ de la SP en fonction de l'emplacement de FA.....	123
Figure 35	Tracé de $L_w, \sigma, L_2$ et CPU en fonction de $\lambda/r_0$ pour la SP .....	124
Figure 36	Lignes de contour (solution numérique) pour le piston circulaire.....	126
Figure 37	Lignes de contour (solution numérique) pour le piston rectangulaire .....	127
Figure 38	Lignes de contour (solution numérique) pour le sphère pulsante.....	127
Figure 39	Rayonnement d'une plaque simplement appuyée .....	128
Figure 40	Présentation géométrique de la PSA et de la FA par GID.....	130
Figure 41	Erreur $L_2$ de la PSA pour deux types de maillage de la structure.....	133
Figure 42	Erreur $L_2$ de la PSA en fonction de la fréquence.....	135
Figure 43	Erreur $L_2$ de la PSA en fonction de l'emplacement de la FA.....	136
Figure 44	Erreur $L_2$ sur le déplacement $w$ pour $R_{FA}=0.6$ .....	139
Figure 45	Tracé de $L_w, \sigma, L_2$ et CPU en fonction de $\lambda/l$ pour la PSA .....	141
Figure 46	Lignes de contour décrivant la réponse à une fréquence de 100 Hz .....	143
Figure 47	Lignes de contour décrivant la réponse à une fréquence de 500 Hz .....	144

## LISTE DES ABRÉVIATIONS ET DES SIGLES

$A$	matrice de Weingarte
$B$	forme bilinéaire
$c$	vitesse du son
$C_p$	chaleur spécifique à pression constante
$C_v$	chaleur spécifique à volume constant
$[C]$	tenseur liant $\varepsilon$ à $\sigma$
$D$	tenseur de déformations
$e$	énergie totale
$E_i$	$i^{\text{ième}}$ état d'équilibre
$f$	fonction source
$f_v$	forces de volumes
$F$	force d'excitation
$g$	onde incidente
$G$	opérateur DtN
$G_N$	opérateur DtN tranqué
$G_s$	module de cisaillement
$h$	hauteur de la structure
$H$	courbure moyenne
$H$	opérateur de Helmholtz
$I$	fonctionnelle d'un probleme
$I$	matrice identité
$I_P$	première forme quadratique de $S_R$ en $P$
$k$	nombre d'onde
$K$	courbure de gauss
$[K]$	matrice de rigidité globale
$L_2$	norme $L_2$
$L_w$	niveau de puissance acoustique
$M$	masse molaire
$M(x)$	point $M$ de l'espace repéré par le vecteur $x$
$[M]$	matrice masse globale
$n$	vecteur unitaire orienté vers l'extérieur
$n$	nombre de nœuds ou élément
$n_p$	vecteur unitaire en $P$
$N$	fonctions d'interpolation
$N$	ensemble des nombres entiers
$N^*$	c'est $N$ sans le zéro
$N_\theta$	dérivée de $n_p$ par rapport à $\theta$
$N_\varphi$	dérivée de $n_p$ par rapport à $\varphi$

$P$	ordre d'interpolation
$p$	pression
$p_-$	inconnue à trouver du côté $\Omega_-^f$
$p_+$	inconnue à trouver du côté $\Omega_+^f$
$\hat{p}_n$	coefficient de Fourier d'ordre $n$ de $p$ ( inconnue du problème)
$p_n$	constante complexe du developpement de $\hat{p}_n$ en série de Hankel d'ordre 1
$p^N$	approximation de $p$
$[P]$	matrice de transformation ou des vecteurs propres
$R$	constante universelle des gaz parfaits
$\mathbf{R}^i$	ensemble de nombre réels de dimension $i$
$S_R$	frontière artificielle : en 2D c'est un cercle et en 3D c'est une sphère
$T$	température
$T_{S_R}$	plan tangent à $S_R$ en $P$
$u$	vecteur de déplacement de composantes $u_i$
$\dot{u}, v$	vecteur vitesse de composantes $\dot{u}_i$ et $v_i$
$\ddot{u}$	vecteur vitesse de composantes $\ddot{u}_i$
$ u $	norme de la vitesse = $(u_1 + u_2 + u_3)^{1/2}$
$V$	vecteur des fonctions solutions
$w$	déplacement transversal de la structure
$W$	amplitude des oscillations
$x$	vecteur position
$x, y, z$	coordonnées cartésiennes
$Z$	ensemble des nombres entiers y compris les nombres négatifs
$Z^*$	c'est $Z$ sans le zéro
$\alpha$	courbe du plan $(\theta, \varphi)$ et aussi désigne un nombre complexe dans le chapitre II
$\beta$	nombre complexe
$\gamma$	rapport des chaleurs spécifiques
$\delta$	symbole de Kronecker
$\varepsilon_s$	seuil de convergence pour le code structure
$\varepsilon$	tenseur des déformations
$\lambda$	longueur d'onde
$\lambda_i$	$i^{\text{ème}}$ valeur propre
$\lambda_s$	module volumétrique
$[\lambda]$	matrice des valeurs propres
$\rho$	densité
$\rho_s$	densité de la structure
$\rho_f$	densité du fluide

$\kappa_i$	courbures principales en un point de $S_R$
$\sigma$	facteur de rayonnement
$\boldsymbol{\sigma}$	tenseur des contraintes de cauchy de composantes $\sigma_{ij}$
$\boldsymbol{\tau}, \tau_i$	tenseur diviatoire et vecteurs tangents du plan tangent $T_{S_R}$
$\hat{\tau}$	paramètre dépendant du désign adopté par le schéma GLS
$\tau_{ij}$	composantes du tenseur diviatoire du tenseur de cauchy
$\omega$	fréquence des harmoniques
$\theta$	angle entre l'axe x et la projection de P sur le plan xy
$\varphi$	angle entre l'axe z et le vecteur position $\overline{OP}$
$\Phi$	potentiel scalaire
$\Psi$	potentiel vectoriel
$\Gamma, \Gamma^f$	frontière de l'obstacle de $\Omega^s$ et frontière artificielle
$\Omega^s, \Omega^f$	obstacle et domaine fluide aussi celui entre $\Gamma$ et $\Gamma^f$
$\Omega_+^f$	domaine fluide extérieur réduit
$\Lambda$	opérateur de courbure
$\Delta_{S_R}$	laplacien définie sur $S_R$
$\Pi_P$	seconde forme quadratique de $S_R$ en P

### Indices:

$i$	valeur unitaire selon la direction des x
$j$	valeur unitaire selon la direction des y
$\infty$	à l'infini
$,$	dérivée par rapport à
$e$	de l'élément

### Notation utilisées:

$\{N\}$	vecteur colonne
$\langle N \rangle$	vecteur ligne
$\begin{bmatrix} \phantom{N} \end{bmatrix}$	matrice
$(\cdot)_{,tt}, (\cdot)_t, (\cdot)_A, (\cdot)_\circ$	dérivée second au temps, $Q^{\text{tité}}$ totale, variation de $(\cdot)$ , équilibre de $(\cdot)$

**Note :** Cette liste ne doit pas être considérée exhaustive. Certains symboles sont utilisées de façon particulière dans un contexte précis; les définitions explicites sont alors clairement énoncées dans le texte.

## INTRODUCTION

### Problématique

Nombreux sont les domaines où une structure est amenée à interagir avec un milieu fluide environnant. On peut citer à titre d'exemple les industries aéronautique et navale où le problème se pose de manière courante.

L'expérience montre que la présence du fluide modifie les caractéristiques de résonances de la structure en rendant critique certains modes vibratoires. D'autre part, cette présence est responsable du rayonnement des ondes sonores, qui produisent des bruits nuisant au confort de l'être humain. Ces problèmes de nuisances dus au bruit deviennent tout particulièrement préoccupant à notre époque sachant qu'en milieu de travail la lutte contre ces bruits utilise uniquement des moyens correctifs.

Pour prédire correctement ces phénomènes, il est nécessaire de développer des méthodes de calcul capables de prendre en compte le couplage entre le fluide et la structure vibrante. Les premières tentatives effectuées dans ce domaine ont été d'ordre analytique et se limitent aux cas de structures de formes géométriques simples telles que les plaques [7, 15, 16] et les coques cylindriques ou sphériques [7, 15, 17].

Seules les méthodes numériques, telles que les méthodes d'éléments finis et des équations intégrales [1, 2, 18] se sont révélées capables de résoudre le cas des structures réelles de formes quelconques.

Ainsi, des laboratoires spécialisés se sont intéressés au problème général d'élastoacoustique et ont pu développer des outils de calcul d'aide à la conception de machines plus silencieuses. Ces outils se basent soit sur la méthode des équations intégrales de frontière «BEM» pour traiter aussi bien les équations acoustiques et les équations de structure, ou sur la BEM pour la partie acoustique et la méthode des



éléments finis «MEF» pour la partie structure. Destinés aux industriels, ces codes de calculs permettent de prévoir, d'analyser et éventuellement de corriger les nuisances sonores engendrées par une machine. Parmi les logiciels commerciaux les plus réputés dans ce domaine, on trouve SYSNOISE et RAYON.

Les problèmes de couplage fluide-structure en vibro-acoustique peuvent être classés en deux grandes catégories : les problèmes de couplage intérieur, tels que les vibrations de réservoirs, remplis de liquides ou de gaz, où le fluide occupe un domaine borné limité par la structure, et les problèmes de couplage extérieur telles que les vibrations d'engins aéronautiques ou de sous-marins où la structure est immergée dans un milieu fluide infini.

Dans le premier cas, les formulations les plus employées sont celles basées sur la méthode des éléments finis, qui nécessitent la discrétisation du domaine occupé par le fluide. Ces formulations ne se distinguent entre elles que par le choix des variables dans le fluide qui peuvent être le déplacement, la pression, le potentiel des déplacements ou ces deux dernières variables à la fois [8, 15, 17].

Dans le second cas, une des difficultés majeures, de point de vue purement numérique, est liée au caractère infini du domaine de calcul. Une approche classique consiste à reformuler de manière équivalente le problème initial comme un problème posé sur la frontière de l'objet. C'est sur ce principe que repose la méthode des équations intégrales de frontière «BEM». On se ramène alors à une représentation sous forme intégrale du champ diffracté à l'aide de la fonction de Green [3, 4, 11]. Cette méthode présente l'avantage d'éviter la discrétisation du domaine fluide, ce qui réduit en principe le coût des calculs. Mais elle apporte en même temps deux inconvénients majeurs; le premier est lié à la singularité des intégrales, ce qui complique la mise en œuvre numérique, et le second réside dans la non symétrie du système final. Cependant, les équations dérivant de ce procédé sont définies par un opérateur pseudo-différentiel non local.

Numériquement, cela se traduit par l'inversion d'un système linéaire plein. De plus, lorsque la fréquence est élevée, il est nécessaire de mailler finement le domaine fluide. Ceci a pour conséquence d'augmenter la taille du système à traiter et nécessite plus de ressources informatiques.

De nos jours, de nouvelles techniques permettant de réduire le temps de calcul ont fait leur apparition. Ces techniques concernent les conditions de surfaces absorbantes qui incorporent d'une manière exacte ou approchée la condition du champ lointain.

Les plus populaires d'entre elles sont :

- Dirichlet-to-Neumann «DtN» tronquée de Feng et Keller-Givoli [20,24],
- la recursion dans l'expansion d'Atkinson-Wilcox de Bayliss et al. [20],
- la localisation des opérateurs pseudo-différentiels de l'approximation de Padé d'Enquist et Majda [23] et
- l'approche Perfectly Matched Layer «PML» de Bérenger [21].

### **Objectifs du mémoire**

Dans ce mémoire, nous allons tenter de solutionner par la MEF le problème de rayonnement des structures simples telle que le piston circulaire, le piston rectangulaire et la plaque simplement appuyée. Pour se faire, nous allons appliquer la méthode DtN au problème de Helmholtz extérieur avec des conditions aux limites absorbantes de Bayliss-Gunburger-Turkel de second ordre. Les tests de validation et de jugement de l'efficacité de cette technique seront faites principalement sur la plage de fréquences moyennes 100 à 1 000 Hz.

### **Contributions**

- ♦ Optimisation du code Helmholtz 2D; et son validation pour le cas de la diffraction sur un disque et un avion.

- ♦ Contribution à la mise en œuvre totale du code Helmholtz 3D en particulier l'implémentation de la condition DtN de Bayliss et Turkel du second ordre (BGT2) à imposer sur la frontière artificielle.
- ♦ Validation du code Helmholtz 3D pour le rayonnement des structures rigides.
- ♦ Adaptation du code de transfert de l'information entre la structure et le fluide appelé Matcher du groupe GRANIT et implémentation de la méthode d'analyse modale.
- ♦ Mise en œuvre de routines traitant la condition d'interface et le calcul du niveau de puissance acoustique et du facteur de rayonnement.
- ♦ Validation du code Rayonnement pour le cas de la plaque simplement appuyée.
- ♦ Analyse de sensibilité de la fréquence et de l'emplacement de la DtN.

### **Plan du mémoire**

Le présent mémoire est scindé en deux parties. La première partie, composée de six chapitres, expose les différentes approches théoriques relatives au sujet de l'acoustique (fluide) et de l'élasto-dynamique (structure). La deuxième partie est consacrée aux tests numériques effectués avec les codes développés relatifs aux problèmes de diffraction et de rayonnement en 3D.

Ainsi, le premier chapitre expose les hypothèses nécessaires pour aboutir aux équations classiques d'acoustique linéaire. Ces dernières nous permettent de déduire l'expression de l'équation d'Euler et celle de l'équation d'onde qui régit la relation entre les variables spatiales et temporelles. Nous établissons à la fin de ce chapitre, pour le cas d'un régime harmonique, l'équation de Helmholtz.

Le second et le troisième chapitre sont consacrés à la diffraction d'ondes acoustiques respectivement en 2D et 3D. Le deuxième chapitre est consacré à la résolution du problème extérieur en mettant l'accent sur la condition artificielle non absorbante. Nous présentons quelques-unes des conditions aux limites les plus souvent utilisées sur la frontière artificielle et nous montrons comment obtenir la condition DtN sur laquelle

s'appuie ce mémoire. Nous établissons finalement la formulation variationnelle et la discrétisation par la méthode d'éléments finis du problème tronqué pour les deux problèmes. Nous exposons aussi les deux schémas de discrétisation de type Galerkin et Galerkin à moindres carrés.

Le quatrième chapitre est consacré aux structures élastiques. Nous présentons les différentes équations et lois qui les régissent. Ensuite nous établissons la formulation variationnelle et la discrétisation en éléments finis de ce problème.

Le chapitre cinq expose les équations relatives au problème de couplage d'une structure élastique avec un fluide homogène, parfait et compressible. Nous y élaborons la formulation variationnelle et la discrétisation en éléments finis. Nous y présentons aussi un algorithme itératif de résolution du couplage fluide-structure.

Au sixième chapitre, nous présentons les différentes méthodes pour la résolution numérique du système algébrique découlant de la discrétisation du problème extérieur de Helmholtz. Nous exposons, en particulier, l'algorithme GMRES pour les nombres complexes préconditionné par les préconditionneurs ILUT et ILU0 pour la résolution du système d'équations discrets.

La partie des tests est consacrée à la validation du code 3D pour le rayonnement des structures rigides en utilisant des problèmes types tels que le problème de la sphère pulsante et celui du piston circulaire et rectangulaire bafflé. Aussi, nous traitons numériquement, dans le dernier chapitre, le problème d'interaction élasto-acoustique en simulant le rayonnement d'une plaque élastique rectangulaire simplement appuyée. Dans ces parties tests, les résultats numériques sont comparés avec la solution analytique.

Enfin, nous concluons ce mémoire en synthétisant les plus importants résultats de nos différents tests numériques sur les problèmes de rayonnement des structures rigides et élastiques.

## CHAPITRE 1

### ACOUSTIQUE LINÉAIRE

Dans ce chapitre, nous allons décrire un des deux types du problème envisagé dans ce mémoire à savoir la propagation des ondes acoustiques. L'équation qui régit les pressions acoustiques va être établie au moyen de quelques hypothèses préliminaires permettant de la formuler sous forme d'une équation aux dérivées partielles. Cette équation régit aussi la propagation de certaines classes d'ondes électromagnétiques et d'ondes élastiques dans les corps solides.

La linéarisation des équations classiques d'acoustique se feront dans le cadre des petits déplacements du fluide. Nous nous intéressons essentiellement au cas d'une dépendance harmonique du temps. La variable d'intérêt est un champ scalaire généralement la pression ou le potentiel de vitesse acoustique.

#### 1.1 Approche physique

Les ondes sont causées par une perturbation provoquée à un certain point puis transmises ou propagées par le milieu environnant. Dans le cas de l'air, lors de son déplacement à partir de sa position d'équilibre, le corps vibrant pousse l'air se trouvant à son amont tout en le comprimant. En même temps, une raréfaction a lieu immédiatement derrière le corps et l'air se précipite pour remplir l'espace vide laissé derrière. De cette façon, l'air comprimé est transféré loin du corps créant ainsi une onde sonore.

Les ondes sonores sont des ondes longitudinales, en d'autres termes les particules se déplacent dans la direction du mouvement de l'onde. La propagation des ondes sonores implique le transfert de l'énergie à travers l'espace. L'énergie transportée par les ondes sonores est en partie cinétique et potentielle. La première est due au mouvement des particules du milieu et la deuxième est due à leur déplacement élastique. Lorsque les

ondes sonores se propagent dans toutes les directions à partir d'une source, elles peuvent être soit réfléchies et réfractées, soit dispersées et diffractées, soit absorbées.

Dans ce qui va suivre, nous supposons que :

- le milieu fluide est continu et homogène,
- le milieu est isotrope et élastique,
- le processus est adiabatique,

En formulation Eulérienne, une particule fluide  $M$ , de coordonnées  $(x_1, x_2, x_3, t)$  dans un système d'axes cartésiens, que l'on suit dans son mouvement peut être caractérisée par sa pression, sa température, sa densité et sa vitesse. Son état est complètement défini par les grandeurs :

$$E_0 \left\{ \begin{array}{l} - \text{pression } p_0(M, t) \\ - \text{température } T_0(M, t) \\ - \text{masse volumique } \rho_0(M, t) \\ - \text{vitesse } \mathbf{v}_0(M, t) \end{array} \right.$$

Si l'on provoque une perturbation de son état initial  $E_0$ , il en résulte un nouvel état  $E_1$ , caractérisé par les grandeurs:

$$E_1 \left\{ \begin{array}{l} - p(M, t) = p_0(M, t) + \delta p \\ - T(M, t) = T_0(M, t) + \delta T \\ - \rho(M, t) = \rho_0(M, t) + \delta \rho \\ - \mathbf{v}(M, t) = \mathbf{v}_0(M, t) + \delta \mathbf{v} \end{array} \right.$$

Par cette perturbation, on provoque une onde qui se propage dans le milieu fluide. Le passage de l'état  $E_0$  à  $E_1$  engendre une modification de l'état thermodynamique qui est caractérisée par une relation entre la pression  $p$ , le volume  $V$ , et la température  $T$ .

## 1.2 Équations fondamentales

### 1.2.1 Équations d'équilibre

L'équilibre du fluide est formulé par les équations de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie :

Équation de la quantité de mouvement :

$$\rho \mathbf{f}_v + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial(\rho \mathbf{v})}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) \quad \text{dans } \Omega^f(t) \quad (1.1)$$

Conservation de la masse :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0 \quad \text{dans } \Omega^f(t) \quad (1.2)$$

Équation d'énergie :

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathbf{e} \mathbf{v} - \boldsymbol{\sigma} \mathbf{v}) = W_{f_v} \quad \text{dans } \Omega^f(t) \quad (1.3)$$

où le quintuple  $(\rho, \mathbf{v}, \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{f}_v, W_{f_v}, e)$  désigne respectivement la densité volumique, la vitesse d'une particule fluide, le tenseur des contraintes de Cauchy, les forces volumiques, le travail des forces volumiques et l'énergie totale du fluide.

### 1.2.2 Équations constitutives

#### 1.2.2.1 Loi de comportement

Le tenseur de contraintes de Cauchy  $\boldsymbol{\sigma}$  est donné par une loi constitutive adéquate qui lie la pression statique du fluide et la vitesse. Pour les fluides newtoniens, on a l'équation (4.1).



$$\boldsymbol{\sigma} = -p \mathbf{I} + \boldsymbol{\tau} = (-p + \lambda(\operatorname{div} \mathbf{v})) \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{D} \quad (1.4)$$

où  $\boldsymbol{\tau}$  est la partie déviatorique du tenseur de contrainte  $\boldsymbol{\sigma}$  ;  $\mu$  et  $\lambda$  sont les constantes de Lamé.

$\mathbf{D}$  représente le tenseur du taux de déformation. Il est lié au vecteur vitesse par la relation suivante :

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T) \quad (1.5)$$

La pression statique est liée aux variables d'état par une loi d'état spécifique, par exemple, dans le cas d'un gaz parfait

$$p = \rho R T \quad (1.6a)$$

où :  $\gamma > 1$  dénote le rapport des coefficients de chaleur spécifiques  $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$

N.B. l'équation (1.6) peut être écrite en grandeurs adimensionnelles sous la forme :

$$p = (\gamma - 1) \left( e - \frac{1}{2} \rho \|\mathbf{v}\|^2 \right) \quad (1.6b)$$

Dans le cas d'un fluide visqueux newtonien incompressible :

$$\boldsymbol{\sigma} = -p \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{D} \quad (1.7)$$

#### 1.2.2.2 Loi d'état

Les transformations sont isentropiques d'où :

$$pV^\gamma = \text{Cte} \quad (1.8)$$

$C_p$  et  $C_v$  sont respectivement le coefficient de chaleur spécifique à pression constante et à volume constant.

### 1.3 Hypothèses de l'acoustique

#### 1.3.1 Hypothèse des équations linéaires

Dans la plupart des cas d'acoustique, le déplacement du fluide est petit. Le fluide est considéré parfait ce qui implique qu'on néglige les effets visqueux autrement dit  $\tau = \mathbf{0}$ .

Dans ce cas le tenseur de contraintes est sphérique c'est à dire :

$$\sigma = -p \mathbf{I} \quad (1.9)$$

En plus, en se plaçant dans l'hypothèse des petits déplacements, nous pouvons considérer que :

- les vitesses sont faibles telle qu'on peut négliger le terme convectif dans les équations de conservation de la quantité de mouvement,
- si on pose  $p_A \equiv \delta p = \varepsilon p$  ; la variation des pressions est faible devant celle d'équilibre i.e.  $p_A \ll p_0$ .

$$\begin{aligned} p_t &= p_0 + \varepsilon p = p_0 + p_A \\ T_t &= T_0 + \varepsilon T = T_0 + T_A \\ \rho_t &= \rho_0 + \varepsilon \rho = \rho_0 + \rho_A \\ \mathbf{v}_t &= \mathbf{v}_0 + \varepsilon \mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_A \end{aligned} \quad (1.10)$$

#### 1.3.2 Équations linéaires

Les différentes hypothèses citées au paragraphe précédent permettent de simplifier les équations (1.1, 1.2 et 1.8), pour, un milieu initialement au repos, i.e pour  $\mathbf{v}_0 = \mathbf{0}$ , comme suit :

### 1.3.2.1 Quantité de mouvement

$$\begin{aligned}
 \mathbf{f}_v - \nabla p_t &= \frac{\partial(\rho_t \mathbf{v}_t)}{\partial t} \Leftrightarrow \mathbf{f}_v - \nabla(p_o + \varepsilon p) = \frac{\partial((\rho_o + \varepsilon \rho) \varepsilon \mathbf{v})}{\partial t} \\
 &\Leftrightarrow \mathbf{f}_v - \nabla p_o - \varepsilon \nabla p = \frac{\partial(\rho_o \varepsilon \mathbf{v})}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \varepsilon^2 \mathbf{v})}{\partial t} \\
 &\stackrel{\substack{\text{au repos} \\ \mathbf{f}_v - \nabla p_o = 0}}{\Leftrightarrow} -\varepsilon \nabla p = \varepsilon \rho_o \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \underbrace{\varepsilon^2 \frac{\partial(\rho \mathbf{v})}{\partial t}}_{O(2)}
 \end{aligned}$$

Si on néglige les termes de second ordre, la dernière expression se simplifie à :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{f}_v - \nabla p_t &= \frac{\partial(\rho_t \mathbf{v}_t)}{\partial t} \Leftrightarrow -\nabla(\varepsilon p) = \rho_o \frac{\partial(\varepsilon \mathbf{v})}{\partial t} \\
 &\Leftrightarrow -\nabla p_A = \rho_o \frac{\partial \mathbf{v}_A}{\partial t}
 \end{aligned} \tag{1.11}$$

L'équation (1.11) est appelée l'équation d'Euler linéarisée.

### 1.3.2.2 Équation de continuité linéarisée

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \rho_t}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{v}_t) &= 0 \Leftrightarrow \frac{\partial(\rho_o + \varepsilon \rho)}{\partial t} + \text{div}((\rho_o + \varepsilon \rho) (\varepsilon \mathbf{v})) = 0 \\
 &\Leftrightarrow \underbrace{\frac{\partial \rho_o}{\partial t}}_{=0} + \frac{\partial(\varepsilon \rho)}{\partial t} + \text{div}(\rho_o \varepsilon \mathbf{v}) + \underbrace{\text{div}(\varepsilon \rho \varepsilon \mathbf{v})}_{O(2)} = 0 \\
 &\Leftrightarrow \frac{\partial(\varepsilon \rho)}{\partial t} + \rho_o \text{div}(\varepsilon \mathbf{v}) + \varepsilon \mathbf{v} \underbrace{\nabla(\rho_o)}_{=0} = 0 \tag{1.12} \\
 &\Leftrightarrow \frac{\partial(\varepsilon \rho)}{\partial t} + \rho_o \text{div}(\varepsilon \mathbf{v}) = 0 \\
 &\Leftrightarrow \frac{\partial \rho_A}{\partial t} + \rho_o \text{div} \mathbf{v}_A = 0
 \end{aligned}$$

### 1.3.2.3 Équation d'état

$$p_t V_t^\gamma = \text{cst} \Rightarrow \frac{dp_t}{p_t} = \gamma \frac{d\rho_t}{\rho_t} \quad (1.13a)$$

$$\text{et} \quad \frac{p_A}{\rho_A} = \frac{p_t - p_o}{\rho_t - \rho_o} = \frac{dp_t}{d\rho_t} = \gamma \frac{p_t}{\rho_t} = \gamma \frac{p_o \left(1 + \varepsilon \frac{p}{p_o}\right)}{\rho_o \left(1 + \varepsilon \frac{\rho}{\rho_o}\right)} \approx \gamma \frac{p_o}{\rho_o} = \frac{\gamma R T_o}{M} = c^2 \quad (1.13b)$$

où «c» est la vitesse de propagation des ondes de compression dans le milieu de propagation, R est la constante universelle des gaz parfaits, M est la masse molaire et T est la température absolue.

### 1.4 Équation d'onde

Éliminant  $v_A$  et  $\rho_A$  dans les équations (11 et 12) on trouve :

$$\begin{cases} \nabla(11) - \frac{\partial(12)}{\partial t} = 0 \\ \nabla(12) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial(11)}{\partial t} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \nabla(\rho_o \frac{\partial v_A}{\partial t} + \nabla p_A) - \frac{\partial(\frac{\partial \rho_A}{\partial t} + \rho_o \text{div } v_A)}{\partial t} = 0 \\ \nabla(\frac{\partial \rho_A}{\partial t} + \rho_o \text{div } v_A) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial(\rho_o \frac{\partial v_A}{\partial t} + \nabla p_A)}{\partial t} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \nabla^2 p_A + \rho_o \frac{\partial(\nabla v_A)}{\partial t} - \frac{\partial^2 \rho_A}{\partial t^2} - \rho_o \frac{\partial(\text{div } v_A)}{\partial t} = 0 \\ \frac{\partial(\nabla p_A)}{\partial t} + \rho_o \nabla(\text{div } v_A) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial(\nabla p_A)}{\partial t} - \frac{\rho_o}{c^2} \frac{\partial^2 v_A}{\partial t^2} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \nabla^2 p_A - \frac{\partial^2 \rho_A}{\partial t^2} = 0 \\ \rho_0 \nabla(\operatorname{div} \mathbf{v}_A) - \frac{\rho_0}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{v}_A}{\partial t^2} = 0 \end{cases}$$

$$\stackrel{\nabla \times \mathbf{v} = 0}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \nabla^2 p_A - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p_A}{\partial t^2} = 0 \quad \text{ou} \quad \nabla^2 \rho_A - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \rho_A}{\partial t^2} = 0 \\ \nabla^2 \mathbf{v}_A - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{v}_A}{\partial t^2} = 0 \end{cases} \quad (1.14)$$

En omettant l'indice A des variables  $(p_A, \rho_A, \mathbf{v}_A)$  dans les équations (1.14), nous retrouvons l'équation d'onde pour la pression et pour la masse volumique :

$$\nabla^2 p - \frac{1}{c^2} p_{,tt} = 0 \quad \text{ou} \quad \nabla^2 \rho - \frac{1}{c^2} \rho_{,tt} = 0 \quad (1.15)$$

### 1.5 Équation de Helmholtz

Par définition, le son est une petite perturbation caractérisée par les perturbations  $(p, \rho)$  d'un état d'équilibre  $(p_0, \rho_0)$  d'un fluide idéal compressible. En chaque point  $M(\mathbf{x})$ , les fonctions  $p(\mathbf{x}, t)$  et  $\rho(\mathbf{x}, t)$  représentent des variations de faibles amplitudes.

Si on utilise dans l'équation (1.15) l'évolution harmonique en temps :

$$p(\mathbf{x}, t) = p(\mathbf{x}) e^{-i\omega t} \quad (1.16)$$

où  $\omega$  est la pulsation; nous obtenons :

$$\nabla^2 p + \left( \frac{\omega}{c} \right)^2 p = 0 \quad (1.17)$$

on pose :

$$k = \frac{\omega}{c} \quad (1.18)$$

qui est un paramètre de dimension  $m^{-1}$  appelé nombre d'onde. À ce nombre, s'associe une grandeur physique appelée la longueur d'onde de dimension  $m$  donnée par :

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi c}{\omega} \quad (1.19)$$

sachant que  $\omega = 2\pi f$ , la longueur d'onde peut être aussi donnée par :

$$\lambda = \frac{c}{f} \quad (1.20)$$

l'équation (1.15) s'écrit finalement :

$$\nabla^2 p + k^2 p = 0 \quad (1.21)$$

elle porte le nom d'équation de Helmholtz.

Si on définit l'opérateur de Helmholtz  $H$  par :

$$H = \nabla^2 + k^2 \quad (1.22)$$

il s'en suit que (1.21) s'écrit sous la forme réduite :

$$H p = 0 \quad (1.23)$$

## CHAPITRE 2

### DIFFRACTION D'ONDES ACOUSTIQUES

#### 2.1 Préambule

Le problème de diffraction d'ondes acoustiques par un obstacle consiste à déterminer le champ de pression engendré par une onde incidente dirigée vers un obstacle borné placé dans un fluide. La plupart des phénomènes de diffraction sont régis en régime harmonique par l'équation de Helmholtz.

Selon que le domaine extérieur à l'obstacle est borné ou non on parle soit de problème de «**Helmholtz intérieur, HI**» ou de «**Helmholtz extérieur, HE**». Nous nous intéressons beaucoup plus aux problèmes du type HE qui se retrouvent dans plusieurs applications. Notons que d'un point de vue numérique, l'une des difficultés du HE est liée au caractère infini du domaine de calcul. De ce fait, les problèmes de diffraction, sont souvent définis sur des domaines ouverts (non-bornés) et sont, par conséquent, résolus par la méthode des éléments de frontière [1, 2, 18]. Une approche classique consiste à reformuler de manière équivalente le problème initial comme un problème posé sur la frontière. Elle utilise la méthode des équations intégrales de frontière qui consiste à représenter sous forme intégrale le champ diffracté en utilisant la fonction de Green [7]. Cette méthode s'appuie sur les formulations de potentiel de simple et double couche du problème de Dirichlet et de Neumann et déploie la BEM [18]. Toutefois, pour les fréquences élevées cette méthode requiert un raffinement du maillage de la surface de l'obstacle ; ce qui donne des matrices denses dont la factorisation est onéreuse. Pour les problèmes de diffraction 3D avec des fréquences relativement élevées, les ressources requises en mémoire et en moyens de calculs peuvent rapidement dépasser ceux des stations de travail disponibles. Pour ces raisons, en plus la restriction de l'utilisation des techniques intégrales aux problèmes linéaires et aux milieux homogènes et isotropes, la

méthode des éléments finis trouve un regain d'intérêt pour la résolution de ce type de problèmes.

Le recours à la méthode des *éléments finis classique* nécessite de définir les bornes du domaine de discrétisation. De là, la nécessité de bien formuler la condition aux limites sur la frontière artificielle est née.

D'un point de vue pratique, l'obstacle est entouré d'une frontière artificielle, située à une distance finie de sa surface externe. Le champ de diffraction à l'extérieur du domaine de calcul est ainsi, soit représenté par les conditions aux limites dites absorbantes (ABC), spécifiées sur cette frontière, soit par des éléments infinis. Dans les deux cas, l'idée est d'empêcher la réflexion des ondes par la frontière artificielle. Berenger [21] propose de remplacer cette frontière par une couche absorbante, d'où la méthode PML (Perfectly Matched Layer), d'épaisseur finie dont le rôle est justement d'amortir les ondes diffractées par l'obstacle. Les dimensions du domaine de calcul sont ainsi augmentées par l'épaisseur de la PML. Actuellement, la technique, baptisée DtN (Dirichlet to Neumann), introduite par Givoli et Keller [29], peut être vue comme une procédure générale pour spécifier des conditions aux limites exactes dites transparentes (CLT) dans le cas de frontières artificielles de formes géométriques simples (cercle, ellipse, sphère, ellipsoïde). Les CLT étant non locales, impliquent un couplage de tous les degrés de liberté au niveau de la frontière artificielle ce qui peut entraîner des matrices denses de grandes tailles.

Pour surmonter ces difficultés, des conditions absorbantes locales simples et faciles à implémenter, telle que la condition de Robin, ont été développées. L'approche, proposée par Enquist et Majda [23] consiste à ne prendre que des approximations de l'opérateur DtN. Bayliss et al. [20] développent asymptotiquement la solution dans le domaine extérieur pour établir ces conditions. Toutefois, les CLA locales ne peuvent éliminer totalement les réflexions parasites.



Sur le plan numérique, la résolution de l'équation de Helmholtz est particulièrement difficile lorsque les fréquences sont élevées à cause de la perte du caractère elliptique et de l'aspect relativement oscillatoire de la solution. Les maillages doivent ainsi être très fins, dans le cas d'un schéma de discrétisation classique, afin de minimiser les bruits numériques.

Pour parer à ces difficultés, des schémas de discrétisation particuliers, tel que le schéma de Galerkin à moindres carrés GLS [25], sont développés.

Dans une première étape de ce travail, nous établissons le modèle mathématique gouvernant les phénomènes de diffraction acoustique en 2D. Ce modèle est, par la suite, reformulé sous sa forme variationnelle grâce à la méthode des résidus pondérés. Le système d'équations, obtenu grâce au schéma de discrétisation de Galerkin, est un système complexe symétrique, creux, non hermitien, non définie positive et à diagonale non dominante. La méthode itérative GMRES, développée par Saad et Schultz [31], associée à un préconditionneur efficace, s'avère très robuste pour résoudre des systèmes de ce type notamment lorsque les fréquences mises en jeu sont moyennes. Les méthodes directes deviennent, en effet, excessivement chères en termes d'espace mémoire et temps de calcul lorsqu'il s'agit de résoudre des systèmes d'équations de grande taille. Souvent, les applications industrielles conduisent à la résolution de systèmes d'équations de plusieurs millions d'inconnues. En tentant de transformer ce système complexe en un système réel, le nombre d'inconnues double et le solveur GMRES ne converge en un temps raisonnable qu'avec l'aide d'un préconditionneur du type CROUT [33]. Ce dernier reste cher du point de vue mémoire et temps de calcul. Les numériciens investissent de grands efforts dans l'élaboration de préconditionneurs efficaces. Cependant, les développements n'ont pas encore atteint ceux des systèmes d'équations réels définis positifs. Nous proposons, dans le cadre de ce travail, le préconditionneur complexe ILUT (Incomplete LU factorization with Threshold), développé par Saad [32].

Ce préconditionneur dérive des méthodes directes de résolution. L'idée de base est d'appliquer une factorisation incomplète du type LU, de faible coût, au système d'équations résultant de la discrétisation de l'équation de Helmholtz. Ce préconditionneur, montre, à la lumière des résultats obtenus, qu'il est possible d'atteindre de bonnes performances [36].

Dans les pages suivantes nous présentons la formulation variationnelle du problème de Helmholtz et nous passons en revue quelques unes des conditions aux limites issues de la technique DtN. Nous établissons par la suite la formulation faible du problème tronqué en 2D. Le problème extérieur de Helmholtz en 3D sera traité au chapitre 3.

## 2.2 Formulation du problème de propagation des ondes acoustique

Considérons un fluide parfait, occupant le domaine acoustique  $\Omega^f$  et entourant un solide  $\Omega^s$  de frontière  $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3$  comme le montre la figure 1.

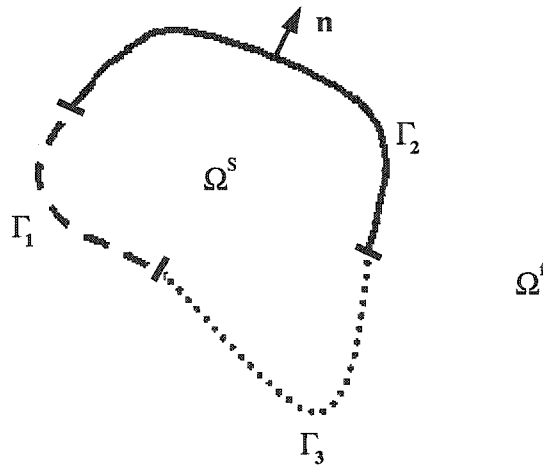


Figure 1 Modèle de configuration géométrique de la propagation d'onde

Le mouvement du fluide est régi par les deux équations de conservation de la quantité de mouvement et de la masse qui sont données en l'absence du terme de source et de la force volumique par les équations (1.11 à 1.13).

Si on désigne par  $p$ ,  $\mathbf{v}$  et  $\mathbf{u}$  respectivement la pression, la vitesse et le déplacement acoustique, en supposant le cas de petits mouvements harmoniques que les ondes sont bien établies avec une fréquence  $\omega$  et en introduisant la convention de séparation de variables, c'est à dire :

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}, t) &= p(\mathbf{x}) e^{-i\omega t} \\ \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{v}(\mathbf{x}) e^{-i\omega t} \\ \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{u}(\mathbf{x}) e^{-i\omega t} \end{aligned} \quad (2.1)$$

Dans ces conditions les équations (1.11 à 1.13) s'écriront :

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla p \Leftrightarrow -i\omega \rho_0 \mathbf{v} = -\nabla p \Leftrightarrow i\omega \rho_0 \mathbf{v} = \nabla p \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} p &= c^2 \rho \Leftrightarrow \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = -c^2 \frac{\partial \operatorname{div}(\rho \mathbf{v})}{\partial t} \\ \text{et} \quad &\Leftrightarrow \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = -c^2 \rho_0 \frac{\partial \operatorname{div} \mathbf{v}}{\partial t} = -c^2 \rho_0 \operatorname{div} \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \right) \\ &\Leftrightarrow \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = c^2 \operatorname{div}(\nabla p) = c^2 \Delta p \end{aligned} \quad (2.3)$$

L'équation (2.3) permet d'écrire l'équation de la conservation ainsi :

$$\frac{\partial p}{\partial t} = c^2 \frac{\partial \rho}{\partial t} = -c^2 \frac{\partial \operatorname{div}(\rho \mathbf{v})}{\partial t} = -c^2 \rho_0 \operatorname{div} \mathbf{v} \quad (2.4)$$

or :

$$\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}$$

Ceci permet de simplifier l'équation de la quantité de mouvement à :

$$\nabla p = i\omega \rho_0 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \rho_0 \omega^2 \mathbf{u} \quad (2.5)$$

Les conditions aux limites sur les bords  $\Gamma$  du domaine acoustique peuvent être de différentes natures et s'écrivent de façon générale sous l'une des trois formes :

▸ Pression  $\bar{p}$  connue sur la partie  $\Gamma_1$  :  $p|_{\Gamma_1} = \bar{p}$  (2.6a)

▸ Déplacement normal acoustique  $\bar{u}$  connu sur la partie  $\Gamma_2$  :  $u|_{\Gamma_2} = \bar{u}$  (2.6b)

▸ Impédance acoustique  $Z$  connue sur la partie  $\Gamma_3$  :  $p - i\omega Z u|_{\Gamma_3} = 0$  (2.6c)

En éliminant le déplacement  $u$ , on aboutit aux équations de propagation des ondes de pression acoustique dans le volume  $\Omega^f$  de frontière  $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta p + k^2 p = 0 & \text{dans } \Omega^f \\ p|_{\Gamma_1} = \bar{p} & \text{sur } \Gamma_1 \\ \frac{\partial p}{\partial n}|_{\Gamma_2} = \rho_0 c^2 k^2 \bar{u} & \text{sur } \Gamma_2 \\ \frac{\partial p}{\partial n} + i k \beta p|_{\Gamma_3} = 0 & \text{sur } \Gamma_3 \end{array} \right. \quad (2.7)$$

où  $\beta = \frac{\rho_0 c}{Z}$  est l'admittance spécifique de la paroi  $\Gamma_3$ .

Si le domaine acoustique  $\Omega^f$  est non borné on parle alors de problème de diffraction extérieur. Dans ce cas, il faut spécifier le comportement de l'onde acoustique à l'infini. Pour des ondes sortant de  $\Omega^f$  on parle de condition de rayonnement de Sommerfeld (C.S.) (voir annexe A). Elle est donnée pour un espace de dimension  $d$  par [17] :

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r^{-\left(\frac{d-1}{2}\right)} \left( \frac{\partial}{\partial r} + i k \right) p = 0 \quad (2.8)$$

Le problème de propagation des ondes de pression acoustique extérieur dans un volume  $\Omega^f$  infini s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta p + k^2 p = 0 & \text{dans } \Omega^f \\ p|_{\Gamma_1} = \bar{p} & \text{sur } \Gamma_1 \\ \frac{\partial p}{\partial n}|_{\Gamma_2} = \rho_0 c^2 k^2 \bar{u} & \text{sur } \Gamma_2 \\ \frac{\partial p}{\partial n} + i k \beta p|_{\Gamma_3} = 0 & \text{sur } \Gamma_3 \\ \frac{\partial p}{\partial r} + i k p = o(r^{-\frac{d-1}{2}}) & r \rightarrow \infty \end{array} \right. \quad (2.9)$$

## 2.3 Formulation variationnelle du problème de Helmholtz

### 2.3.1 Domaine borné

#### 2.3.1.1 Formulation faible

Le problème de Helmholtz relatif à un domaine fermé ou confiné nécessite l'utilisation de fonctions test appartenant à l'espace de Sobolev qui est défini comme suit :

$$H^1(\Omega^f) = \left\{ v / \|\nabla v\|^2 + \|v\|^2 < \infty \right\} \quad (2.10)$$

où  $\|\cdot\|$  est la norme  $L_2$ .

Considérons le problème aux conditions aux limites mixtes suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta p + k^2 p = 0 & \text{sur } \Omega^f \\ \frac{\partial p}{\partial n} + \beta p = g & \text{sur } \Gamma \end{array} \right. \quad (2.11)$$

Le problème de Helmholtz pour un domaine fermé consiste à trouver  $p \in H^1(\Omega^f)$  qui satisfait (2.11) où  $\beta$  est un nombre complexe.

Nous déduisons la formulation faible en utilisant le procédé des résidus pondérés, suivi d'une intégration par parties : soit  $q$  une fonction arbitraire telle que  $q \in H^1(\Omega^f)$  et nulle sur la partie de la frontière où on a des conditions aux limites de type Dirichlet.

Multiplions en premier l'équation du système (2.11) par  $q$  et intégrons par partie sur  $\Omega^f$ . Nous désirons que la somme des résidus pondérés soit nulle. Le problème variationnel faible revient à trouver  $p$  vérifiant :

$$\int_{\Omega} (\nabla q \nabla p - k^2 q \cdot p) d\Omega = \int_{\Gamma} q \mathbf{n} \cdot \nabla p d\Gamma \quad (2.12)$$

or 
$$\frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} = g - \beta p \quad \text{sur } \Gamma \quad (2.13)$$

ce qui permet d'écrire :

$$\int_{\Gamma} q \mathbf{n} \cdot \nabla p d\Gamma = \int_{\Gamma} q (g - \beta p) d\Gamma \quad (2.14)$$

En résumé, le problème variationnel s'écrit :

Trouver  $p$  tel que :

$$\int_{\Omega} (\nabla q \nabla p - k^2 q \cdot p) d\Omega = \int_{\Gamma} (q g - \beta q p) d\Gamma \quad \forall q \in H^1(\Omega^f) \quad (2.15)$$

Qui peut aussi s'écrire sous la forme :

$$B(q, u) - \ell(q) = 0 \quad (2.16)$$

où :

$$\begin{cases} B(q, p) = \int_{\Omega} (\nabla q \nabla p - k^2 q \cdot p) d\Omega + \beta \int_{\Gamma} q p d\Gamma \\ \ell(q) = \int_{\Gamma} g q d\Gamma \end{cases} \quad (2.17)$$

Dans le cas où on désire traiter le problème défini par le système d'équation (2.7), nous avons:

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma} q \mathbf{n} \cdot \nabla p \, d\Gamma &= \int_{\Gamma} q \frac{\partial p}{\partial n} \, d\Gamma \\
&= \int_{\Gamma_1} q \frac{\partial p}{\partial n} \, d\Gamma_1 + \int_{\Gamma_2} q \frac{\partial p}{\partial n} \, d\Gamma_2 + \int_{\Gamma_3} q \frac{\partial p}{\partial n} \, d\Gamma_3 \\
&= \int_{\Gamma_1} q \frac{\partial p}{\partial n} \, d\Gamma_1 + \int_{\Gamma_2} q (\rho_0 c^2 k^2 \bar{u}) \, d\Gamma_2 - \int_{\Gamma_3} q (ik\beta p) \, d\Gamma_3
\end{aligned} \tag{2.18}$$

En choisissant  $q$  dans le sous-espace  $\mathbf{K}$  des fonctions de carré sommable et nulles sur  $\Gamma_1$  nous aurons :

$$\int_{\Gamma} q \mathbf{n} \cdot \nabla p \, d\Gamma = \int_{\Gamma_2} q (\rho_0 c^2 k^2 \bar{u}) \, d\Gamma_2 - \int_{\Gamma_3} q (ik\beta p) \, d\Gamma_3 \tag{2.19}$$

Nous aboutissons donc à l'égalité variationnelle donnée par l'équation (2.20).

$$\int_{\Omega} (k^2 q \cdot p - \nabla q \cdot \nabla p) \, d\Omega - \int_{\Gamma_3} q (ik\beta p) \, d\Gamma_3 = - \int_{\Gamma_2} q (\rho_0 c^2 k^2 \bar{u}) \, d\Gamma_2 \quad \forall q \in \mathbf{K} \tag{2.20}$$

Comme pour le problème précédent, l'équation (2.20) peut s'écrire :

$$B(p, q) - \ell(q) = 0 \quad \forall q \in \mathbf{K} \tag{2.21}$$

Le principe variationnel équivalent à (2.20) est donné par :

$$\delta I = 0 \quad \text{avec } p = \bar{p} \text{ sur } \Gamma_1 \tag{2.22}$$

où  $I$  est la fonctionnelle du problème :

$$I(p) = \frac{1}{2} B(p, p) - \ell(p) \tag{2.23}$$

La fonction  $B$  est bilinéaire et symétrique alors que la fonctionnelle  $I$  est uniquement linéaire (annexe II)

Afin de trouver une solution approchée du problème (2.20), nous allons utiliser la méthode des éléments finis.

### 2.3.1.2 Discrétisation par éléments finis du problème intérieur HI

La discrétisation de l'équation (2.15) ou (2.20) est obtenue en remplaçant  $\Omega^f$  par un ensemble fini de volume  $\Omega_e^f \subset \Omega^f$ . Dans ce cas nous pouvons utiliser une approximation de  $p$  par éléments finis sur chaque volume  $\Omega_e^f$  :

$$p = \sum_{i=1}^m p_i \phi_i \quad (2.24)$$

où  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_m$  est une base d'approximation.

En prenant  $q$  dans le même espace d'approximation que  $p$  et après réaménagement nous aboutissons après assemblage des matrices élémentaires au système linéaire suivant:

$$(-\mathbf{K}^f + k^2 \mathbf{M}^f - i k \mathbf{G}^f) \mathbf{p} = \mathbf{r} \quad (2.25)$$

où :

$$\mathbf{p}^t \mathbf{K}^f \mathbf{q} = \sum_{e=1}^{n_f} \int_{\Omega_e^f} \nabla p \cdot \nabla q \, d\Omega_e^f \quad (2.26a)$$

$$\mathbf{p}^t \mathbf{M}^f \mathbf{q} = \sum_{e=1}^{n_f} \int_{\Omega_e^f} \rho_s q \cdot p \, d\Omega_e^f \quad (2.26b)$$

$$\mathbf{p}^t \mathbf{G}^f \mathbf{q} = \sum_{e=1}^{n_f} \int_{\Gamma_{3e}} q \cdot p \, d\Gamma_3 \quad (2.26c)$$

$$\mathbf{q}^t \mathbf{r} = \sum_{e=1}^{n_f} \int_{\Gamma_{2e}} q (\rho_s c^2 k^2 \bar{u}) \, d\Gamma_2 \quad (2.26d)$$

Notons par  $\Omega_G^f = \bigcup_{e=1}^{n_f} \Omega_e^f$ ,  $\Gamma_3 = \bigcup \Gamma_{3e}$  et  $\Gamma_2 = \bigcup \Gamma_{2e}$ .

où :  $\mathbf{K}^f$ ,  $\mathbf{M}^f$ ,  $\mathbf{G}^f$  et  $\mathbf{s}$  représentent respectivement la matrice de rigidité, la matrice de masse, la matrice de masse de frontière et le vecteur des sollicitations globales.  $\mathbf{p}$  et  $\mathbf{r}$  représentent respectivement le vecteur global de toutes les variables nodales et le vecteur global des sollicitations.



### 2.3.2 Domaine infini

Nous considérons le phénomène de diffraction d'une onde incidente connue, venant de l'infini, sur un obstacle borné  $\Omega^s$  de bord  $\Gamma$ , et parfaitement conducteur. L'onde se propage dans un milieu extérieur  $\Omega^f$  homogène et parfait (voir figure 2).

Dans ce cas on parle de problème extérieur et la formulation faible est moins évidente puisque l'intégrale est portée sur tout le domaine ouvert  $\Omega^f$ .

Comme le domaine  $\Omega^f$  n'est pas borné cela pose des problèmes à l'application de la méthode des éléments finis standard, qui est plutôt recommandée pour les domaines fermés.

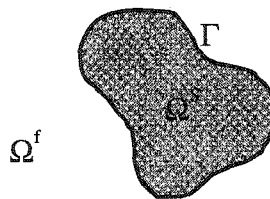


Figure 2 Géométrie formulant le problème extérieur

Néanmoins, Il existe une technique qui consiste à résoudre ce problème en décomposant le domaine extérieur en champ proche et champ lointain par le biais d'une frontière enfermant l'obstacle  $\Omega^s$ .

#### 2.3.2.1 Décomposition du domaine extérieur

Supposons que nous avons à résoudre le problème suivant :

$$\begin{cases} \Delta p + k^2 p + f = 0 & \text{dans } \Omega^f \\ \frac{\partial p}{\partial n} = g & \text{sur } \Gamma \\ \lim_{r \rightarrow \infty} r^{-\left(\frac{d-1}{2}\right)} \left( \frac{\partial p}{\partial r} - i k p \right) = 0 \end{cases} \quad (2.27)$$

Une façon naturelle pour discrétiser ce problème extérieur est, comme nous l'avons cité, de décomposer le domaine extérieur en deux, comme on le voit sur la figure 3.

L'obstacle  $\Omega^s$  est entouré par une frontière artificielle  $\Gamma^f \subset \overline{\Omega^s}$ . Notons par  $\Omega^f$  le domaine annulaire entre  $\Gamma$  et  $\Gamma^f$  et par  $\Omega_+^f$  le domaine extérieur réduit. Le problème (2.27) est donc équivalent au problème couplé donné par l'équation (2.28).

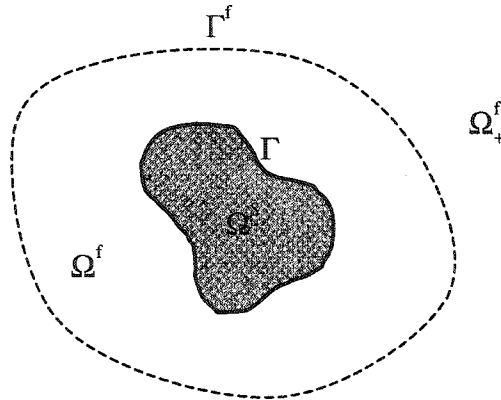


Figure 3 Troncature du domaine de calcul

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta p_- + k^2 p_- = 0 & \text{dans } \Omega^f \\ \partial_n p_- = g & \text{sur } \Gamma \\ p_- = p_+ & \text{sur } \Gamma^f \\ \partial_n p_- = \partial_n p_+ & \text{sur } \Gamma^f \\ \Delta p_+ + k^2 p_+ = 0 & \text{dans } \Omega_+^f \\ \lim_{r \rightarrow \infty} r^{-\left(\frac{d-1}{2}\right)} \left( \frac{\partial p}{\partial r} - i k p \right) = 0 & \end{array} \right. \quad (2.28)$$

Supposons que  $p_- = p_+$  est donné sur  $\Gamma^f$  et que nous pouvons résoudre analytiquement, pour  $p_+$  dans  $\Omega_+^f$ , le problème extérieur de Dirichlet. Ayant  $p_+$  nous pouvons calculer  $\partial_n p_+$  sur  $\Gamma^f$ . Ceci permet de construire l'opérateur :

$$G : p_+|_{\Gamma^f} \rightarrow \partial_n p_+|_{\Gamma^f} \quad (2.29)$$

ou encore

$$G : p_-|_{\Gamma^f} \rightarrow \partial_n p_-|_{\Gamma^f} \quad (2.30)$$

$G$  est un opérateur linéaire puisque le problème est linéaire défini de  $H^{1/2}(\Gamma^f)$  vers  $H^{-1/2}(\Gamma^f)$ . Il est dénommé opérateur de Dirichlet-to-Neuman (DtN) [17] et permet de transformer le problème (2.28) en :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta p + k^2 p + f = 0 & \text{dans } \Omega^f \\ \partial_n p = g & \text{sur } \Gamma \\ \partial_n p = G p & \text{sur } \Gamma^f \end{array} \right. \quad (2.31)$$

Le problème est donc ramené à un problème à domaine borné  $\Omega^f$ . On montre que pour la solution numérique l'opérateur  $G$  dans (2.31) doit être remplacé [17] par l'opérateur de DtN tronqué  $G_N$  on se ramène alors à la résolution de :

$$\begin{cases} \Delta p^N + k^2 p^N + f = 0 & \text{dans } \Omega^f \\ \partial_n p^N = g & \text{sur } \Gamma \\ \partial_n p^N = G p^N & \text{sur } \Gamma^f \end{cases} \quad (2.32)$$

$p^N$  représente une approximation de  $p$ . Le problème (2.32) peut être donc résolu par la méthode MEF standard. Si on dénote  $p_h^N$  la solution par FEM de (2.32) nous avons :

$$\|p - p_h^N\| \leq \|p - p^N\| + \|p^N - p_h^N\| \quad (2.33)$$

Comme les deux erreurs coexistent, (2.33) nous permet d'analyser séparément la convergence de la FEM et l'erreur de l'opérateur DtN.

### 2.3.2.2 Existence et unicité de la solution

La solution du problème (2.32) existe et est unique comme le révèle la proposition 1 :

#### Proposition 1 :

Si  $f \in L^2(\Omega^f)$  à support compact et  $g \in H^{1/2}(\Gamma)$ , le problème (2.27) admet une unique solution  $p \in H^1(\Omega^f)$ .

La démonstration se trouve dans [4].

### 2.3.2.3 Conditions aux limites sur la frontière artificielle

Comme nous le savons la condition de Sommerfeld (CS) a été introduite pour compléter les conditions aux frontières du problème et pour assurer l'unicité de la solution. En vue de résoudre numériquement le problème (2.27), on borne le domaine de calcul en introduisant une frontière artificielle sphérique  $S_R$  (figure 4), située à l'extérieur du support de  $f$ . On impose alors sur  $S_R$  une condition aux limites qui remplace la

condition de rayonnement à l'infini et minimise les réflexions artificielles. Ensuite, on cherche la solution numérique dans le domaine borné par  $S_R$  et  $\Gamma$ .

Le choix de la condition à imposer sur  $S_R$  est très important car il détermine la distance à laquelle on peut rapprocher  $S_R$  du support de  $f$  et doit aussi conduire à un problème bien posé.

Les conditions aux limites peuvent être transparente C.L.T. ou absorbante C.L.A. Le premier cas correspond à celui de la condition non locale exacte ou encore à la condition DtN. Elle traduit la non-production de réflexion artificielle par  $S_R$ .

Elle s'écrit en 2D [17, 33] :

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial n} &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{H_0^{(1)'}(kR)}{H_0^{(1)'}(kR)} p(R, \varphi) d\varphi + \frac{k}{\pi} \sum_{n \neq 0} \int_0^{2\pi} \frac{H_n^{(1)'}(kR)}{H_n^{(1)'}(kR)} \cos(n(\theta - \varphi)) p(R, \varphi) d\varphi \quad \text{sur } S_R \quad (2.34) \\ &= Gp \end{aligned}$$

où :

- $G$  est définie par (2.31)
- $S_R$  est la sphère de centre  $O$  et de rayon  $R$ ,  $O$  désignant le centre géométrique de  $\Omega^S$ ,
- $H_1^{(1)}$  désigne la fonction de Hankel cylindrique du premier type d'ordre  $n$  (voir Annexe VII) et  $H_1^{(1)'}$  sa dérivée.

Ainsi, la solution du problème aux limites posé dans  $\Omega^f$  est la restriction à  $\Omega^f$  de la solution du problème (2.27) posé dans tout  $\Omega_+^f \cup \Omega^f$ . On dit alors qu'on a mis sur  $S_R$  une condition aux limites transparente (C.L.T.).

D'autres méthodes consistent à prendre une approximation de C.L.T. On parle alors de conditions aux limites absorbantes (C.L.A). Elles permettent d'éviter les problèmes numériques dus à la non-localité des C.L.T. Malgré ceci, on n'évite pas les réflexions artificielles sur  $S_R$ . L'idée la plus simple est d'imposer :

$$\frac{\partial p}{\partial n} = i k p \quad \text{sur } S_R \text{ en 2D et 3D} \quad (2.35)$$

car cette condition est de la même forme que la condition de rayonnement de Sommerfeld. Il est connu que cela donne de mauvais résultats [33].

Pour diminuer les réflexions sur  $S_R$  en 2D, certains auteurs ont proposé des conditions aux limites d'ordre supérieur de l'expansion en série de Taylor de l'opérateur  $D_t N$ ; parmi eux :

- *Enquist et Majda* [23] ont développé une technique basée sur la théorie des opérateurs pseudo-différentiels qui leur permet d'obtenir une suite de C.L.A. locale d'ordre  $m$  croissant.

Dans le cas où  $S_R$  est un cercle de rayon  $R$ , les deux premières conditions sont :

$$E_1 p = \left[ \frac{\partial}{\partial r} - i k + \frac{1}{2R} \right] p = 0 \quad \text{sur } S_R \quad (2.36a)$$

$$E_2 p = \left[ \frac{\partial}{\partial r} - i k + \frac{1}{2R} - \frac{1}{2k^2 R^2} \left( i k + \frac{1}{R} \right) \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right] p = 0 \quad \text{sur } S_R \quad (2.36b)$$

- *Bayliss, Gunzburger & Turkel* [20] ont utilisé un développement asymptotique en  $\frac{1}{R}$  de la solution exact (2.34). Ainsi, ils forment une suite d'opérateurs différentiels locaux dont chaque terme  $E_m$  s'obtient en éliminant les  $m$  premiers termes du développement.

Dans le cas où  $S_R$  est un cercle de Rayon  $R$ , chaque opérateur  $E_m$  est défini par :

$$E_m p = \prod_{j=1}^m \left( \frac{\partial}{\partial r} - i k + \frac{4j-3}{2R} \right) p = 0 \quad \text{sur } S_R \quad (2.37a)$$

$$E_1 p = \left( \frac{\partial}{\partial r} - i k + \frac{1}{2R} \right) p = 0 \quad \text{sur } S_R \quad (2.37b)$$

$$E_2 p = \left[ \frac{\partial}{\partial r} - \frac{-2k^2 - \frac{3ik}{R} + \frac{3}{4R^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}}{2 \left( ik - \frac{1}{R} \right)} \right] p = 0 \quad \text{sur } S_R \quad (2.37c)$$

- *Feng* [24] a obtenu une condition exacte non-locale en dérivant une relation intégrale sur  $S_R$  utilisant la fonction de Green appropriée. Il approche finalement cette condition par une suite de C.L.A locales.

Dans le cas où  $S_R$  est un cercle de rayon  $R$ , les quatre premières conditions sont :

$$F_0 p = \left[ \frac{\partial}{\partial r} - i k \right] p = 0 \quad \text{sur } S_R \quad (2.38a)$$

$$F_1 p = \left[ \frac{\partial}{\partial r} - i k + \frac{1}{2R} \right] p = 0 \quad \text{sur } S_R \quad (2.38b)$$

$$F_2 p = \left[ \frac{\partial}{\partial r} - i k + \frac{1}{2R} - \frac{i}{8kR^2} - \frac{i}{2kR^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right] p = 0 \quad \text{sur } S_R \quad (2.38c)$$

$$F_3 p = \left[ \frac{\partial}{\partial r} - i k + \frac{1}{2R} - \frac{i}{8kR^2} - \frac{1}{8k^2 R^3} - \frac{i}{2kR^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \frac{i}{2k^2 R^3} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right] p = 0 \quad \text{sur } S_R \quad (2.38d)$$

Remarques :

- L'opérateur de Sommerfeld  $ik$  est obtenu pour l'ordre d'approximation  $m = 0$  uniquement dans l'approche de Feng.

- Toutes les conditions sont essentiellement équivalentes pour l'ordre  $m = 1$ .
- La condition de Feng et de Enquist & Majda conduit à un opérateur symétrique (en  $\theta$ ).
- Le nombre d'onde  $k$  figure dans les ordres supérieurs des opérateurs en terme d'inverse de sa puissance.

Cependant, la plupart des C.L.A. ne conduisent à de faibles réflexions sur la frontière artificielle que pour certains angles d'incidence ou certaines fréquences [38].

Ceci dit, la méthode DtN s'avère bien meilleure que la plupart des conditions locales données précédemment. Son seul défaut est qu'elle implique un couplage des degrés de liberté sur la frontière donnant lieu à une matrice dense.

#### 2.3.2.4 Conditions DtN en 2D

Prenons pour  $S_R$  le cercle de centre  $O$  et de rayon  $R$ . Soit  $\Omega_+^f$  le domaine extérieur tel que  $\Omega_+^f = \overline{\Omega^f \cup \Omega^S}$  tel que  $\Omega^f \cap \Omega^S = \Gamma$  et  $\mathbf{n}$  la normale unitaire à  $S_R$  orientée vers l'extérieur de  $\Omega^f \cup \Omega^S$  comme dans la figure 4.

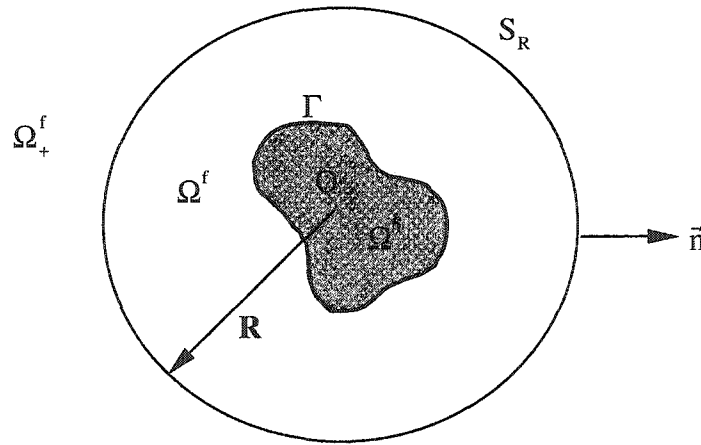


Figure 4 Domaine de calcul du problème extérieur de Helmholtz.



Supposons que nous voulons résoudre le problème extérieur de Helmholtz suivant en 2D :

$$\begin{cases} \Delta p + k^2 p = 0 & \text{dans } \Omega_e \\ p(R, \theta) = g_R & \text{sur } S_R \\ \lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left( \frac{\partial p}{\partial r} - i k p \right) = 0 \end{cases} \quad (2.39)$$

Soit  $p$  la solution du problème (2.39). Le développement en série de Fourier de  $p$  en coordonnées polaires est :

$$p(r, \theta) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{p}_n(r) e^{in\theta} \quad \forall r \in [R, +\infty[, \forall \theta \in [0, 2\pi] \quad (2.40)$$

où  $\hat{p}_n$  désigne le coefficient de Fourier d'ordre  $n$  de  $p$ .

L'équation de (2.39a) s'écrit en coordonnées polaires :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 p}{\partial \theta^2} + k^2 p = 0 \quad (2.41)$$

En posant  $s = kr$ ,  $\hat{v}_n(s) = \hat{p}_n(r)$  et remplaçant (2.40) dans (2.41) nous obtenons :

$$s^2 \frac{\partial^2 \hat{v}_n}{\partial s^2} + s \frac{\partial \hat{v}_n}{\partial s} + (s^2 - n^2) \hat{v}_n = 0 \quad n \in \mathbb{Z} \quad (2.42)$$

La solution de (2.42) qui vérifie la condition de rayonnement à l'infini est la fonction de Hankel cylindrique d'ordre  $n$  du premier et second type  $H_n^{(1)}$  et  $H_n^{(2)}$  (voir Annexe VII).

Or, la fonction de Hankel de second type représente une onde de retour qui est éliminée par la condition de Sommerfeld. La solution se présente donc ainsi :

$$\hat{p}_n(r) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} p_n H_n^{(1)}(kr) \quad \forall r \in [R, +\infty[ , \forall n \in \mathbb{Z} \quad (2.43)$$

où  $p_n$  est une constante complexe indépendante de  $r$ .

La transformée inverse de (2.43) donne :

$$p(r, \theta) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} p_n H_n^{(1)}(kr) e^{in\theta} \quad \forall r \in [R, +\infty[ \text{ et } \forall \theta \in [0, 2\pi] \quad (2.44)$$

Par définition : 
$$\hat{p}_n(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p(r, \theta') e^{-in\theta'} d\theta' \quad \forall r \in [R, +\infty[ \text{ et } \forall n \in \mathbb{Z} \quad (2.45)$$

D'où  $\forall r \in [R, +\infty[ , \forall \theta \in [0, 2\pi]$  :

$$\begin{aligned} p(r, \theta) &= \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} * \int_0^{2\pi} p(r, \theta') \cos(n(\theta - \theta')) d\theta', \\ p(r, \theta) &\stackrel{(2.44)}{=} \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} * \int_0^{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n H_n^{(1)}(kr) e^{in\theta} \cos(n(\theta - \theta')) d\theta', \\ &= \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} * \sum_{n \in \mathbb{Z}} p_n H_n^{(1)}(kr) \int_0^{2\pi} e^{in\theta'} \cos(n(\theta - \theta')) d\theta' \quad (2.46) \\ &= \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} * \left[ \pi H_n^{(1)}(kr) (p_n e^{in\theta} + e^{in\pi} p_{-n} e^{-in\theta}) \right] \end{aligned}$$

le \* dans la somme signifie que le terme correspondant à  $n = 0$  doit être multiplié par  $\frac{1}{2}$ .

ce qui nous donne :

$$\begin{aligned} p(r, \theta) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{H_0^{(1)}(kr)}{H_0^{(1)}(kR)} p(R, \theta') d\theta' + \frac{1}{\pi} \sum_{n \neq 0} \int_0^{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{H_n^{(1)}(kr)}{H_n^{(1)}(kR)} \cos(n(\theta - \theta')) p(R, \theta') d\theta' \\ &\quad \forall (r, \theta) \in [R, +\infty[ \times [0, 2\pi] \end{aligned} \quad (2.47)$$

Soit  $G$  l'opérateur de Calderon [16, 33] du problème (2.39) :

$$G : H^{1/2}(S_R) \rightarrow H^{-1/2}(S_R) \quad (2.48)$$

$$p \rightarrow \partial_n p|_{S_R}$$

avec  $p$  solution de (2.40). Cet opérateur modélise les ondes sortantes de  $S_R$ . La condition exacte donnée par (2.48) est couramment appelée condition transparente.

En différentiant (2.47) par rapport à  $r$  et en prenant la limite lorsque  $r$  tend vers  $R$ , nous obtenons l'expression explicite de l'opérateur  $G$ . Ainsi nous établissons une condition aux limites transparente sur  $S_R$  en écrivant que la solution de (2.28) vérifie (2.39) :

**Condition DtN**

$$\forall \theta \in [0, 2\pi]$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial p}{\partial n} = G p \text{ sur } S_R \text{ où} \\ G(p(R, \theta)) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{H_0^{(1)}(kR)}{H_0^{(1)}(kR)} p(R, \varphi) d\varphi + \frac{k}{\pi} \sum_{n \neq 0} \int_0^{2\pi} \frac{H_n^{(1)}(kR)}{H_n^{(1)}(kR)} \cos(n(\theta - \varphi)) p(R, \varphi) d\varphi \end{array} \right. \quad (2.49)$$

### 2.3.2.5 Formulation faible du problème tronqué de Helmholtz en 2D

#### a) Cas où la condition sur la frontière artificielle n'est pas connue

Le problème à résoudre est donné par la figure 5.

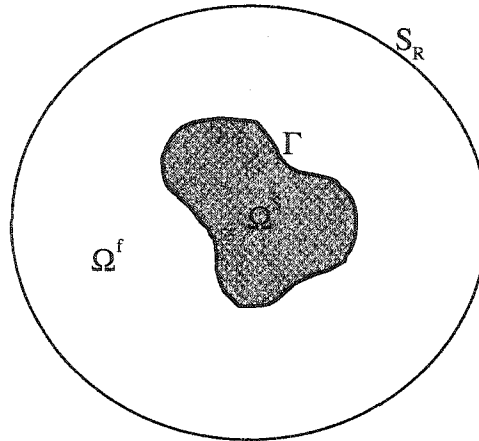


Figure 5 Domaine tronqué en 2D du Problème HE où la FA est un cercle

Il consiste à trouver  $p$  tel que :

$$\begin{cases} \Delta p + k^2 p = 0 & \text{dans } \Omega_e \\ p(R, \theta) = g_R & \text{sur } \Gamma \\ \lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left( \frac{\partial p}{\partial r} - i k p \right) = 0 \end{cases} \quad (2.50)$$

$p$  désigne la pression de l'onde diffractée par  $\Gamma$ . la fonction  $g_R$  représente l'onde incidente. Le domaine constitué par  $\Omega^S$  moins  $\Gamma$  est dénoté par  $\Omega_e$  ( $\Omega^S = \Omega_e \cup \Gamma$ ).

Pour définir la formulation faible du problème (2.50), nous introduisons l'espace fonctionnel  $H^1(\Omega^f)$ . Multiplions l'équation (2.50a) par une fonction test  $q$  comme au par-avant puis intégrons par partie sur  $\Omega^f$ . En utilisant le résultat fourni par l'équation (2.12) il vient :

$$\int_{\Omega^f} q \cdot (\Delta p + k^2 p) d\Omega^f = \int_{\Gamma} g q d\Gamma + i k \int_{s_R} q p d\Gamma - \int_{\Omega} (\nabla q \nabla p - k^2 q \cdot p) d\Omega^f \quad (2.51)$$

Donc nous aboutissons au problème variationnel suivant :

$$\begin{cases} \text{trouver } p \in H^1(\Omega^f) \\ b(p, q) = l(g, q) \quad \forall q \in H^1(\Omega^f) \end{cases} \quad (2.52)$$

$$\text{avec :} \quad b(p, q) = i k \int_{s_R} q p d\Gamma - \int_{\Omega} (\nabla q \nabla p - k^2 q \cdot p) d\Omega^f \quad (2.53)$$

$$\text{et} \quad l(g, q) = \int_{\Gamma} g q d\Gamma \quad (2.54)$$

#### b) Cas où la condition DtN est exacte

Dans ce cas (2.50) est remplacé par le problème tronqué suivant :

$$\begin{cases} \Delta p + k^2 p + f = 0 & \text{dans } \Omega^f \\ \frac{\partial p}{\partial r} = g & \text{sur } \Gamma \\ \frac{\partial p}{\partial n} = G p & \text{sur } S_R \end{cases} \quad (2.55)$$

L'équation de la formulation faible de (2.55) est alors (pour  $f=0$ ) :

$$\int_{\Omega^f} q \cdot (\Delta p + k^2 p) d\Omega^f = \int_{\Gamma} g q d\Gamma + \int_{S_R} q G p d\Gamma - \int_{\Omega^f} (\nabla q \nabla p - k^2 q \cdot p) d\Omega^f \quad (2.56)$$

Donc la solution du problème (2.55) est solution du problème variationnel suivant :

$$\begin{cases} \text{trouver } p \in H^1(\Omega^f) \\ \int_{\Omega^f} (\nabla q \nabla p - k^2 q \cdot p) d\Omega^f + \int_{S_R} q G p d\Gamma = \int_{\Gamma} g q d\Gamma \quad \forall q \in H^1(\Omega^f) \end{cases} \quad (2.57)$$

On montre que le problème (2.57) admet une solution unique [33].

### 2.3.2.6 Discrétisation en E.F. du problème extérieur de Helmholtz tronqué

La discrétisation de l'équation (2.53) est obtenue en remplaçant  $\Omega^f$  par un ensemble fini de volume  $\Omega_e^f \subset \Omega^f$  et en utilisant l'approximation de  $p$  sur chaque volume  $\Omega_e^f$  donnée par :

$$p = \sum_{i=1}^m p_i \phi_i \quad (2.58)$$

Où  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_m$  est une base d'approximation.

La discrétisation conduit au système linéaire suivant :

$$(\mathbf{K}^f - k^2 \mathbf{M}^f - \mathbf{G}^f) \mathbf{p} = \mathbf{r} \quad (2.59)$$

On pose :

$$\mathbf{A} = \mathbf{K}^f - k^2 \mathbf{M}^f + \mathbf{G}^f \quad (2.60)$$

où :  $\mathbf{K}^f$ ,  $\mathbf{M}^f$ ,  $\mathbf{G}^f$ ,  $\mathbf{p}$  et  $\mathbf{s}$  représente respectivement la matrice de rigidité, la matrice de masse, matrice de masse de frontière, le vecteur nodal et le vecteur des sollicitations global.

Dans le cas du problème (2.55)  $\mathbf{G}^f$  est déduite de :

$$\mathbf{p}^t \mathbf{G}^f \mathbf{q} = \int_{S_R} \mathbf{q} \cdot \mathbf{G} \mathbf{p} \, dS_R \quad (2.61)$$

N.B. Dans le cas d'une DtN approchée l'opérateur  $\mathbf{M}$  introduit une matrice de rigidité et une autre de masse se rapportant à la frontière artificielle.

### 2.3.2.7 Système d'équations

La forme discrète (2.57) conduit finalement à la résolution du système d'équations complexes linéaires (2.62). La matrice  $\mathbf{A}$  donnée par l'équation (2.60) est une matrice carrée, complexe, creuse, symétrique, non hermitienne, à diagonale non dominante et de partie hermitienne non définie positive :

$$\mathbf{A} \mathbf{p} = \mathbf{r} \quad (2.62)$$

où :

- $\mathbf{A}$  est une matrice carrée, complexe, symétrique et bande
- $\mathbf{r}$  est le vecteur source. Ce vecteur est formé à partir des vecteurs seconds membres élémentaires
- $\mathbf{p}$  est un vecteur dont les composantes sont les inconnues nodales.

Il apparaît que l'effet de la condition DtN dans un schéma de discrétisation par éléments finis standard n'est que l'inclusion de la matrice complexe  $\mathbf{G}^f$  (2.61) dans la matrice

globale  $\mathbf{A}$ . De plus, les termes  $\mathbf{G}_{ij}^f$  sont nuls dès que les nœuds d'indices  $i$  ou  $j$  n'appartiennent pas à la frontière artificielle. Si la condition DtN est non locale, il est évident que ces termes sont non nuls pour tous les nœuds d'indice  $i$  et  $j$  appartenant à la frontière artificielle  $S_R$  ce qui peut détruire la structure bande de la matrice si une numérotation particulière n'est pas imposée au maillage.

### 2.3.2.8 Formulation de Galerkin Moindres Carrés du problème de Helmholtz

Lors de la résolution numérique de l'équation de Helmholtz par la méthode de Galerkin habituelle, l'erreur, comme nous allons le voir, selon la norme  $L_2$  de la solution numérique est une fonction croissante du nombre d'onde, même si le nombre d'éléments par longueur d'onde  $(kh)$  où  $h$  est la taille moyenne d'un élément fini donné est gardé constant. Cette erreur est qualifiée, par Ihlenburg et Babuška [27], de pollution numérique. Un calcul d'erreur standard montre que pour assurer la convergence, dans le cas des éléments finis linéaires, il suffit que la quantité  $k(kh)$  soit inférieure à un. Cependant, l'expérience numérique et le calcul analytique montrent que, pour certains problèmes monodimensionnels, cette règle reste pessimiste. Une condition suffisante assurant que cette erreur ne croît pas est d'avoir  $k(kh)^2$  strictement inférieure à un. Cette sévère condition conduit à des maillages éléments finis fins et donc à la résolution de grands systèmes d'équations.

La méthode de Galerkin Moindres carrés, désignée dans la littérature anglo-saxonne par Galerkin Least Square "GLS", a été imaginée par Harrari et Hughes [25]. Cette méthode permet de relaxer la condition de Babuška et autorise, en hautes fréquences, une résolution des maillages éléments finis moins fine en comparaison avec la méthode de Galerkin habituelle. La forme variationnelle est ajustée de façon à tenir compte du résidu de l'équation aux dérivées partielles. Ce résidu est nul dans le cas d'un système continu. La formulation variationnelle, dans le cadre de la méthode GLS pour le cas de la diffraction en 2D, a pour expression :

$$a_{\text{GLS}}(u, v) = b(v) - \hat{\tau} \int_{\Omega} f \mathbf{H}(v) d\Omega \quad (2.63)$$

$$a_{\text{GLS}}(u, v) = a(u, v) + \hat{\tau} \int_{\Omega} \mathbf{H}(u) \mathbf{H}(v) d\Omega \quad (2.64)$$

où :

$\mathbf{H}$  est l'opérateur différentiel de Helmholtz définie par :  $\mathbf{H}(.) = \Delta(.) + k^2(.)$ .

$\hat{\tau}$  est un paramètre dont le choix dépend du critère de design adopté.

Si on considère le paramètre  $\hat{\tau}$  comme une grandeur locale, la méthode GLS peut être étendue aux cas des maillages non structurés. La méthode de projection de Galerkin habituelle est un cas particulier de la méthode GLS correspondant à  $\hat{\tau} = 0$ . Dans le cas des éléments finis de continuité  $C^0$ , les dérivées d'ordre supérieur à un dans la relation (2.64) sont nuls. Par conséquent, le système d'équations, issu de la discrétisation de (2.63), est là encore formé d'une combinaison linéaire des matrices rigidité et masse classique. La matrice de contour  $C$ , résultant de la discrétisation de l'opérateur  $\text{DtN}$ , n'est pas affectée. La méthode GLS n'apporte, dans ces conditions, aucune complexité supplémentaire par rapport à la technique de Galerkin; seuls les éléments de la matrice masse sont multipliés par le facteur  $1 - \hat{\tau} k^2$ .

$$[K]_e \{u\}_e + (1 - \hat{\tau} k^2) [M]_e \{u\}_e = \{0\} \quad (2.65)$$



## CHAPITRE 3

### PROBLÈME EXTÉRIEUR DE HELMHOLTZ EN 3D

#### 3.1 Définition du problème

Considérons la diffraction en régime harmonique d'ondes acoustiques par un objet rigide dans un domaine fluide homogène tridimensionnel. Ce problème extérieur, donné par la figure 6, est gouverné par le problème aux limites [12,14] donnée par (3.1).

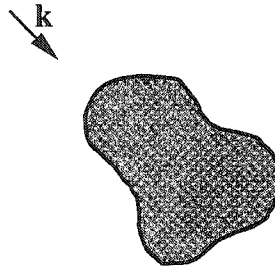


Figure 6 Diffraction d'un objet entouré d'un fluide en 3D

Il consiste à trouver  $p$  tel que :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta p + k^2 p = 0 & \text{dans } \Omega^f \\ p = g \quad \text{ou} \quad \frac{\partial p}{\partial n} = f & \text{sur } \Gamma \\ \lim_{r \rightarrow +\infty} r \left( \frac{\partial p}{\partial n} - i k p \right) = 0 & \end{array} \right. \quad (3.1)$$

où  $p$  désigne l'onde diffractée par l'objet rigide.  $g$  et  $f$  sont des fonctions données.

### 3.2 Formulation dans un domaine borné

Comme pour le cas de deux dimensions, nous bornerons le domaine de calcul en introduisant une frontière artificielle sphérique  $S_R$  de rayon égal à  $R$ , située à l'extérieur du support de  $f$  (voir figure 7). Nous imposerons alors sur  $S_R$  une condition limite qui remplace la condition de rayonnement à l'infini et minimise les réflexions artificielles ensuite nous chercherons la solution numérique dans le domaine borné par  $S_R$  et  $\Gamma$  ou encore sur  $\Omega^f$ .

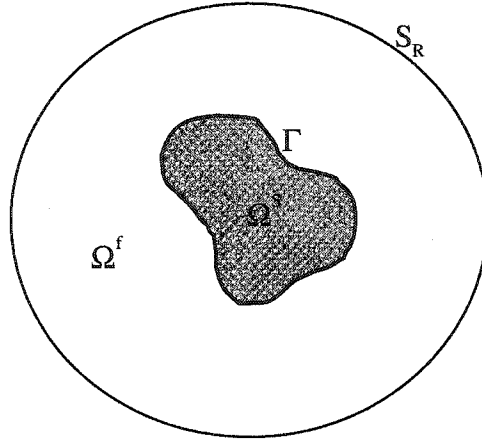


Figure 7 Domaine tronqué en 3D du Problème HE où la FA est une sphère

Nous utilisons, tout comme pour le cas 2D, une condition du type Bayliss-Gunburger-Turkel d'ordre 2 spécifiée dans [11, 12, 19]. Ainsi, nous sommes conduits à résoudre le problème aux limites suivant :

Trouver  $p$  tel que :

$$\begin{cases} \Delta p + k^2 p = 0 & \text{dans } \Omega^f \\ p = g \text{ ou } \frac{\partial p}{\partial n} = f & \text{sur } \Gamma \\ \frac{\partial p}{\partial n} = -Mp & \text{sur } S_R \end{cases} \quad (3.2)$$

où  $M$  est cette fois-ci un opérateur différentiel [11,12,13] défini pour  $S_R$  quelconque par :

$$M p = \left( -i k + H + \frac{i}{2k} \left( 1 + i \frac{2H}{k} \right)^{-1} (K - H^2) - \frac{\Delta_{S_R} H}{4k^2} \right) p - \operatorname{div}_{S_R} \left( \frac{1}{2ik} \left( I + i \frac{\Lambda}{k} \right)^{-1} \nabla_{S_R} p \right) \quad (3.3)$$

$I, \Lambda, H$  et  $K$  désignent respectivement la matrice identité, l'opérateur de courbure, la courbure moyenne et la courbure de Gauss en un point de la surface  $S_R$ . Les deux derniers paramètres sont donnés par :

$$H = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}$$

$$K = \kappa_1 \kappa_2$$

avec  $\kappa_1$  et  $\kappa_2$  sont les courbures principales en un point de la surface  $S_R$ .

### 3.3 Forme variationnelle

La forme variationnelle associée au problème aux limites que l'on vient d'établir s'énonce ainsi :

$$\begin{cases} \text{trouver } p \in H^1(\Omega^f) \\ B(p, q) = L(q) \quad \forall q \in H^1(\Omega^f) \end{cases} \quad (3.4)$$

$B(.,.)$  est une forme bilinéaire symétrique définie sur  $H^1(\Omega^f) \times H^1(\Omega^f)$  par :

$$B(p, q) = \int_{\Omega} \nabla p \cdot \nabla q \, d\Omega - k^2 \int_{\Omega} p q \, d\Omega + \int_{S_R} M p q \, d\Gamma \quad (3.5)$$

et  $L(.)$  est la forme linéaire définie par :

$$L(q) = \int_{\Gamma} f q \, d\Gamma \quad (3.6)$$

En remplaçant l'expression (3.3) dans  $\int_{S_R} M p q d\Gamma$ , nous obtenons :

$$\begin{aligned} \int_{S_R} M p q d\Gamma = & -ik \int_{S_R} p q d\Gamma + \int_{S_R} H p q d\Gamma + \frac{i}{2k} \int_{S_R} \left(1 + i \frac{2H}{k}\right)^{-1} (K - H^2) p q d\Gamma \\ & - \frac{1}{4k^2} \int_{S_R} \Delta_{S_R} H p q d\Gamma - \frac{1}{2ik} \int_{S_R} \left(I + i \frac{\Lambda}{k}\right)^{-1} \nabla_{S_R} p \nabla_{S_R} q d\Gamma \end{aligned} \quad (3.7)$$

Ce qui montre que si le problème variationnel (3.4) est approximé par la méthode des éléments finis, la condition de Bayliss-Gunburger-Turkel du second ordre [11] introduit seulement des termes du type masse et rigidité. Cette dernière est définie sur la surface artificielle  $S_R$ .

### 3.4 Implémentation de la condition de second ordre de Bayliss-Gunburger-Turkel

Les calculs exhaustifs des matrices de rigidité et de masse introduites par BGT d'ordre deux sont explicités dans [11]. Néanmoins, nous traiterons la condition de rayonnement surfacique, plus exactement la dernière intégrale du second membre de (3.7), pour une surface absorbante sphérique, à savoir :

$$\int_{S_R} \left(I + i \frac{\Lambda}{k}\right)^{-1} \nabla_{S_R} p \nabla_{S_R} q d\Gamma \quad (3.8)$$

Nous utilisons pour le domaine fluide un maillage formé d'éléments tétraédriques linéaires. Dans ces conditions, la surface absorbante sera composée d'éléments triangulaires et la quatrième intégrale de l'équation (3.7) est nulle. Seule subsiste la première, la deuxième et la cinquième intégrales (on verra par la suite que dans le cas où  $S_R$  est une sphère nous avons :  $K = H^2$ ; ce qui permet d'éliminer la troisième intégrale). D'autre part, l'équation (3.8) contient l'opérateur gradient surfacique  $\nabla_{S_R}$

relatif à chaque sommet de l'élément triangulaire en question. Ses composantes sont définies par rapport à une base orthonormée du plan tangent. Dans le cas de la méthode des éléments finis, cet opérateur est évalué aisément par rapport à une base se rapportant à chaque sommet de l'élément. Il est ensuite ramené à la base orthonormée du plan tangent par une transformation adéquate [11, 12].

Dans la suite de ce paragraphe, on s'intéresse au calcul l'expression de l'équation (3.8). La paramétrisation géométrique, dans le cas général, de la frontière artificielle  $S_R$  en un point P est :

$$\begin{aligned} \Psi : ]0, 2\pi[ \times ]0, \pi[ &\rightarrow \Gamma \subset \mathbb{R}^3 \\ (\theta, \varphi) &\rightarrow \Psi(\theta, \varphi) = (R \cos \theta \sin \varphi, R \sin \theta \sin \varphi, R \cos \varphi) = P \end{aligned} \quad (3.9a)$$

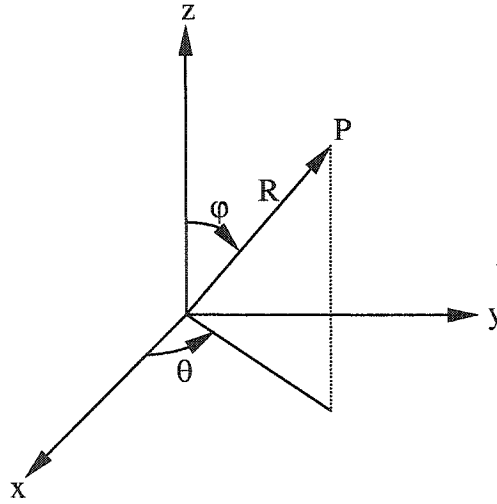


Figure 8 Représentation paramétrique de  $S_R$  au point P

Le point P s'écrit alors :  $P = X(\theta, \varphi)$

Les vecteurs sphériques non unitaires tangents  $T(\tau_1, \tau_2)$  à  $S_R$  au point P, définissant le plan tangent, sont donnés par :

$$\tau_1 = \frac{\partial X}{\partial \theta} = X_\theta \quad \text{et} \quad \tau_2 = \frac{\partial X}{\partial \varphi} = X_\varphi \quad (3.9b)$$

Dans ce cas :

$$\begin{aligned}\tau_1 &= (-R \sin \theta \sin \varphi, R \cos \theta \sin \varphi, 0) \\ \tau_2 &= (R \cos \theta \cos \varphi, R \sin \theta \cos \varphi, -R \sin \varphi)\end{aligned}$$

La normale au plan tangent en P est :

$$\mathbf{n}_P = \frac{\tau_1 \wedge \tau_2}{\|\tau_1 \wedge \tau_2\|} = \frac{\mathbf{X}_\theta \wedge \mathbf{X}_\varphi}{\|\mathbf{X}_\theta \wedge \mathbf{X}_\varphi\|} = \mathbf{n}_P(\theta, \varphi) \quad (3.9c)$$

Soit  $\alpha$  une courbe du plan  $(\theta, \varphi)$  définie paramétriquement par :

$$\alpha(t) : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}(\theta, \varphi) \quad (3.9d)$$

Le vecteur tangent à  $\alpha(t)$  est :

$$\alpha'(t) = \mathbf{X}_\theta \theta_t + \mathbf{X}_\varphi \varphi_t = \tau_1 \theta_t + \tau_2 \varphi_t \quad (3.9e)$$

La variation du vecteur normale  $\mathbf{n}_P$  restreinte à la courbe  $\alpha$  est donnée par [9] :

$$d\mathbf{n}_P(\alpha') = \mathbf{n}'_P(\theta(t), \varphi(t)) = \mathbf{N}_\theta \theta_t + \mathbf{N}_\varphi \varphi_t \in \text{Plan T}(\tau_1, \tau_2) \quad (3.9f)$$

$\mathbf{N}_\theta$  et  $\mathbf{N}_\varphi$  désignent les dérivées respectives de  $\mathbf{n}_P$  par rapport à  $\theta$  et  $\varphi$ .  $d\mathbf{n}_P(\alpha')$  mesure comment l'orientation tire loin  $\mathbf{n}_P$  dans un voisinage de P.

Comme  $\mathbf{N}_\theta$  et  $\mathbf{N}_\varphi$  appartiennent au plan tangent, nous pouvons alors écrire :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{N}_\theta \\ \mathbf{N}_\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_\theta \\ \mathbf{X}_\varphi \end{bmatrix} \quad (3.9g)$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned}d\mathbf{n}_P(\alpha') &= \left( \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_t \\ \varphi_t \end{bmatrix} \right)^T \begin{bmatrix} \mathbf{X}_\theta \\ \mathbf{X}_\varphi \end{bmatrix} \\ &= (a_{11} \theta_t + a_{12} \varphi_t) \mathbf{X}_\theta + (a_{21} \theta_t + a_{22} \varphi_t) \mathbf{X}_\varphi\end{aligned} \quad (3.9h)$$

puisque, [9] :

$$d\mathbf{n}_P \begin{pmatrix} \theta_t \\ \varphi_t \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_t \\ \varphi_t \end{bmatrix} \quad (3.9i)$$

Ceci montre que dans la base  $\{\mathbf{X}_\theta, \mathbf{X}_\varphi\}$ ,  $d\mathbf{n}_P(\alpha')$  est donnée par la matrice  $(a_{ij})$ . À la dérivée de  $\mathbf{n}_P$  au point P on associe une forme quadratique  $\Pi_P$  définie par le produit scalaire de  $d\mathbf{n}_P(\alpha')$  par  $\alpha'$ . Cette forme quadratique définie dans le plan tangent est dénommée seconde forme fondamentale de  $S_R$  en P [9].

L'expression de la seconde forme fondamentale est :

$$\Pi_P = -d\mathbf{n}_P(\alpha') \cdot \alpha' = -(N_\theta \theta_t + N_\varphi \varphi_t) \cdot (X_\theta \theta_t + X_\varphi \varphi_t) \quad (3.9j)$$

Nous avons d'après (3.9c) :

$$\mathbf{n}_P \cdot \mathbf{X}_\theta = 0 \quad \text{et} \quad \mathbf{n}_P \cdot \mathbf{X}_\varphi = 0 \quad (3.9k)$$

Dérivons la première et la seconde expression respectivement par rapport à  $\varphi$  et  $\theta$ , nous obtiendrons :

$$\begin{aligned} N_\varphi \cdot \mathbf{X}_\theta + \mathbf{n}_P \cdot \mathbf{X}_{\theta\varphi} &= 0 \\ N_\theta \cdot \mathbf{X}_\varphi + \mathbf{n}_P \cdot \mathbf{X}_{\varphi\theta} &= 0 \end{aligned} \quad (3.9l)$$

$$\text{Autrement :} \quad N_\theta \cdot \mathbf{X}_\varphi = -\mathbf{n}_P \cdot \mathbf{X}_{\theta\varphi} = N_\varphi \cdot \mathbf{X}_\theta \quad (3.9m)$$

Dans ces conditions, l'équation (3.9j) devient :

$$\begin{aligned} \Pi_P &= -N_\theta \cdot \mathbf{X}_\theta \theta_t^2 - 2N_\theta \cdot \mathbf{X}_\varphi \theta_t \varphi_t + N_\varphi \cdot \mathbf{X}_\varphi \varphi_t^2 \\ &= e \theta_t^2 - 2f \theta_t \varphi_t + g \varphi_t^2 \\ &= \begin{bmatrix} \theta_t & \varphi_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e & f \\ f & g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_t \\ \varphi_t \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.9n)$$

avec :

$$\begin{aligned} e &= -N_\theta \cdot \mathbf{X}_\theta = \mathbf{n}_P \cdot \mathbf{X}_{\theta\theta} \\ f &= -N_\theta \cdot \mathbf{X}_\varphi = \mathbf{n}_P \cdot \mathbf{X}_{\varphi\theta} = -N_\varphi \cdot \mathbf{X}_\theta \\ g &= -N_\varphi \cdot \mathbf{X}_\varphi = \mathbf{n}_P \cdot \mathbf{X}_{\varphi\varphi} \end{aligned} \quad (3.9o)$$

Les égalités en extension dans (3.9o) découlent de (3.9m).

De plus, d'après (3.9g) :

$$\begin{aligned}
 -e &= \mathbf{N}_\theta \cdot \mathbf{X}_\theta = (a_{11} \mathbf{X}_\theta + a_{21} \mathbf{X}_\varphi) \cdot \mathbf{X}_\theta \\
 &= a_{11} \mathbf{X}_\theta \cdot \mathbf{X}_\theta + a_{21} \mathbf{X}_\varphi \cdot \mathbf{X}_\theta \\
 &= a_{11} E + a_{21} F \\
 -f &= \mathbf{N}_\theta \cdot \mathbf{X}_\varphi = (a_{11} \mathbf{X}_\theta + a_{21} \mathbf{X}_\varphi) \cdot \mathbf{X}_\varphi \\
 &= a_{11} \mathbf{X}_\theta \cdot \mathbf{X}_\varphi + a_{21} \mathbf{X}_\varphi \cdot \mathbf{X}_\varphi \\
 &= a_{11} F + a_{21} G \\
 -g &= \mathbf{N}_\varphi \cdot \mathbf{X}_\varphi = (a_{12} \mathbf{X}_\theta + a_{22} \mathbf{X}_\varphi) \cdot \mathbf{X}_\varphi \\
 &= a_{12} \mathbf{X}_\theta \cdot \mathbf{X}_\varphi + a_{22} \mathbf{X}_\varphi \cdot \mathbf{X}_\varphi \\
 &= a_{12} F + a_{22} G
 \end{aligned}$$

Ces trois expressions forment des relations entre les coefficients  $e, f, g$  et  $E, F, G$  qui peuvent s'écrire matriciellement comme :

$$- \begin{bmatrix} e & f \\ f & g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} \quad (3.9p)$$

Par définition, la forme quadratique  $I_p = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{v}\|^2 \geq 0$  définie sur le plan tangent est appelée première forme fondamentale de  $S_R$  en  $P$  [9].  $E, F$  et  $G$  constituent donc les coefficients de la première forme fondamentale dans la base  $\{\mathbf{X}_\theta, \mathbf{X}_\varphi\}$ .

L'équation (3.9p) s'écrit aussi :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} e & f \\ f & g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}^{-1} \quad (3.9q)$$



avec :

$$\begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{EG-F^2} \begin{bmatrix} G & -F \\ -F & E \end{bmatrix} \quad (3.9r)$$

Par la suite, nous déduisons les expressions des coefficients  $a_{ij}$  de la matrice  $d\mathbf{n}_p(\alpha')$  définie par l'équation (3.9i), que nous notons par A :

$$\begin{cases} a_{11} = \frac{fF - eG}{EG - F^2} \\ a_{12} = \frac{eF - fE}{EG - F^2} \\ a_{21} = \frac{gF - fG}{EG - F^2} \\ a_{22} = \frac{fF - gE}{EG - F^2} \end{cases} \quad (3.9s)$$

Ces équations sont dites " de Weingarten ". (3.9q) s'écrit, tenant compte de (3.9i) et (3.9o), aussi sous la forme

$$-A = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{\theta\theta} \cdot \mathbf{n} & \mathbf{X}_{\theta\varphi} \cdot \mathbf{n} \\ \mathbf{X}_{\varphi\theta} \cdot \mathbf{n} & \mathbf{X}_{\varphi\varphi} \cdot \mathbf{n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{\theta} \cdot \mathbf{X}_{\theta} & \mathbf{X}_{\theta} \cdot \mathbf{X}_{\varphi} \\ \mathbf{X}_{\varphi} \cdot \mathbf{X}_{\theta} & \mathbf{X}_{\varphi} \cdot \mathbf{X}_{\varphi} \end{bmatrix}^{-1}$$

Par définition [9], le déterminant et l'opposé de la moitié de la trace de A désignent respectivement la courbure de Gauss K et la courbure moyenne H de  $S_R$  en P.

Le déterminant de cette matrice est :  $K = \det(A) = \det(a_{ij}) = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}$  (3.9t)

Les valeurs propres de A, qui ne sont autres que les courbures principales  $\kappa_1$  et  $\kappa_2$ , sont les racines de l'équation :

$$A\mathbf{v} = -\kappa\mathbf{v} \quad \forall \mathbf{v} \in T(\tau_1, \tau_2)_{S_R} \quad \text{et} \quad \mathbf{v} \neq \mathbf{0} \quad (3.9u)$$

caractéristique de A.

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} + \kappa & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} + \kappa \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \kappa^2 + \kappa (a_{11} + a_{22}) + a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = 0$$

$$\Leftrightarrow \kappa^2 + 2H\kappa + K = 0$$

Les expressions de K et H sont reliées à celles de  $\kappa_1$  et  $\kappa_2$  par :

$$H = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2} = \frac{1}{2} \frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2}$$

$$K = \kappa_1 \kappa_2 = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} \quad (3.9v)$$

Si on applique les équations (3.9b à v) au cas d'une surface sphérique nous obtenons pour :

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_\theta &= [-R \sin \theta \sin \varphi \quad R \cos \theta \sin \varphi \quad 0] \\ \mathbf{X}_\varphi &= [R \cos \theta \cos \varphi \quad R \sin \theta \cos \varphi \quad -R \sin \varphi] \\ E &= \mathbf{X}_\theta \cdot \mathbf{X}_\theta = R^2 \sin^2 \varphi \\ F &= \mathbf{X}_\theta \cdot \mathbf{X}_\varphi = 0 \\ G &= \mathbf{X}_\varphi \cdot \mathbf{X}_\varphi = R^2 \\ \mathbf{n}_P &= \frac{\mathbf{X}_\theta \wedge \mathbf{X}_\varphi}{\|\mathbf{X}_\theta \wedge \mathbf{X}_\varphi\|} = \frac{[-\cos \theta \sin^2 \varphi \quad -\sin \theta \sin^2 \varphi \quad -\cos \varphi \sin \varphi]}{|\sin \varphi|} \\ \mathbf{X}_{\theta\theta} &= [-R \cos \theta \sin \varphi \quad -R \sin \theta \sin \varphi \quad 0] \\ \mathbf{X}_{\theta\varphi} &= [-R \sin \theta \cos \varphi \quad R \cos \theta \cos \varphi \quad 0] \\ \mathbf{X}_{\varphi\varphi} &= [-R \cos \theta \sin \varphi \quad -R \sin \theta \sin \varphi \quad -R \cos \varphi] \\ \mathbf{e} &= \mathbf{n}_P \cdot \mathbf{X}_{\theta\theta} \\ \mathbf{f} &= \mathbf{n}_P \cdot \mathbf{X}_{\theta\varphi} \\ \mathbf{g} &= \mathbf{n}_P \cdot \mathbf{X}_{\varphi\varphi} \\ a_{ij} &\text{ sont calculées à partir de (3.9s)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Lambda &= -A = \frac{1}{R} I \\
\left( I + i \frac{\Lambda}{k} \right)^{-1} &= \left( 1 + i \frac{1}{k R} \right)^{-1} I \\
\kappa_1 &= \kappa_2 = \frac{1}{R} \\
H &= \frac{1}{R} \\
K &= \frac{1}{R^2}
\end{aligned} \tag{3.9w}$$

L'approximation de l'intégrale (3.8) se fait numériquement comme [11, 12] :

$$\int_{S_R} \left( I + i \frac{\Lambda}{k} \right)^{-1} \nabla_{S_R} p^l \nabla_{S_R} q^m \, d\Gamma \tag{3.10a}$$

L'opérateur gradient tangentiel  $\nabla_{S_R}$  surfacique en un point donné d'un élément triangulaire est non seulement appliqué sur la fonction inconnue mais également sur la fonction test. Il est approximé par le gradient sur chaque élément triangulaire  $\mathbf{K} = (a_K^j, a_K^{j+1}, a_K^{j+2})$  (figure 9).

Soit  $\vartheta^j = \{ \mathbf{e}_K^j, \mathbf{e}_K^{j+2}, \mathbf{n}^j \}_K$  la base locale utilisée pour calculer les courbures au sommet  $j$  d'un triangle  $K$  de la surface triangularisée  $S_R$ . On note  $a_K^j, a_K^{j+1}$  et  $a_K^{j+2}$  ses sommets si l'on prend la convention de permutation circulaire sur les indices  $j$ . Pour chaque sommet  $a_K^j$  on associe un vecteur  $\mathbf{n}^j = \mathbf{n}(a_K^j)$  comme la normale sortante unitaire au nœud  $a_K^j$ . Ce vecteur nous permet de définir le plan tangent  $T_{a_K^j}(S_R)$  au point  $a_K^j$  comme le plan auquel appartient  $a_K^j$  et admettant  $\mathbf{n}^j$  comme normale (voir figure 9).

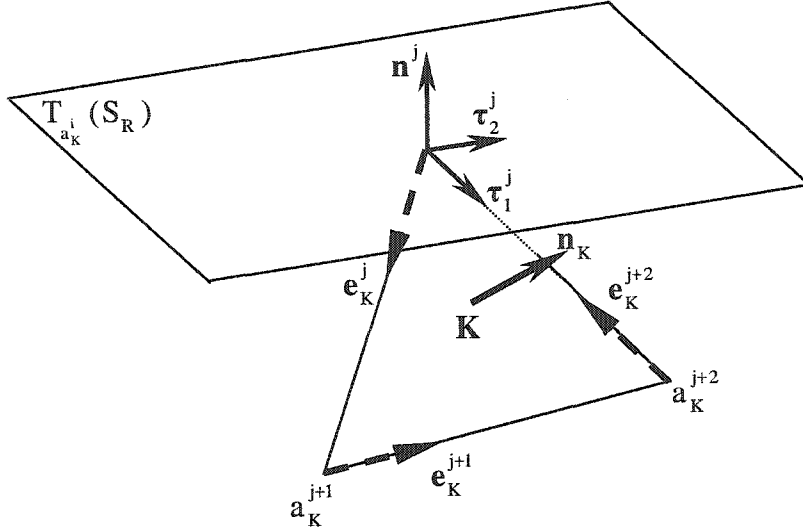


Figure 9 Notations ayant traits à l'approximation de l'opérateur de courbure  $\Lambda$ .

Le gradient surfacique sur le triangle  $K$  d'une fonction de forme  $u_K^j$ ,  $m \in I_3 = \{1, 2, 3\}$ , peut s'exprimer dans la base  $\{e_K^j, e_K^{j+2}\}$  comme :

$$\nabla_{S_R} u_K^j = \varepsilon_K^j e_K^j + \varepsilon_K^{j+2} e_K^{j+2} \quad (3.10b)$$

avec :

$$\begin{cases} \varepsilon_K^j = -\frac{\ell_K^{j+2} + \ell_K^j (e_K^j \cdot e_K^{j+2})}{\ell_K^j \ell_K^{j+2} (1 - (e_K^j \cdot e_K^{j+2})^2)} \\ \varepsilon_K^{j+2} = +\frac{\ell_K^j + \ell_K^{j+2} (e_K^j \cdot e_K^{j+2})}{\ell_K^j \ell_K^{j+2} (1 - (e_K^j \cdot e_K^{j+2})^2)} \end{cases}, \quad j \in I_3 \quad (3.10c)$$

$\ell_K^j$  et  $\ell_K^{j+2}$  désignent les arêtes du triangle  $K$  :

$$\ell_K^j = a_K^j a_K^{j+1} \quad \text{et} \quad \ell_K^{j+2} = a_K^{j+2} a_K^j \quad (3.10d)$$

Pour chaque sommet de  $K$ , l'opérateur  $\Lambda$  peut être représenté par rapport à la base  $\vartheta^j$  par la matrice  $-A^j$  et les deux gradients surfaciques dans (3.10a) peuvent être transformés à cette base en utilisant la matrice de transformation suivante :

$$P^j = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_K^j \cdot \boldsymbol{\tau}_1^j & \mathbf{e}_K^j \cdot \boldsymbol{\tau}_2^j \\ \mathbf{e}_K^{j+2} \cdot \boldsymbol{\tau}_1^j & \mathbf{e}_K^{j+2} \cdot \boldsymbol{\tau}_2^j \end{bmatrix} \quad (3.10e)$$

Ceci introduit une erreur de projection puisque la base  $\{\mathbf{e}_K^j, \mathbf{e}_K^{j+2}\}$  n'est pas celle du plan tangent  $T_{a_K}(S_R)$ .

Finalement, l'application de la formule de quadrature numérique faisant intervenir les sommets du triangle  $K$  donne [12] :

$$\int_{s_R} \left( I + i \frac{\Lambda}{k} \right)^{-1} \nabla_{s_R} u^l \nabla_{s_R} u^m d\Gamma \approx \frac{1}{3} |K| \sum_{j=1}^3 (P^j \boldsymbol{\varepsilon}_K^m)^t \left( I + \frac{i}{k} A^j \right)^{-1} (P^j \boldsymbol{\varepsilon}_K^l) \quad (3.10f)$$

Dans le cas d'une surface absorbante sphérique,  $A^j$  vaut  $\frac{1}{R}I$  ce qui simplifie (3.10f) à :

$$\int_{s_R} \left( I + i \frac{\Lambda}{k} \right)^{-1} \nabla_{s_R} u^l \nabla_{s_R} u^m d\Gamma \approx \frac{1}{3} |K| \left( 1 + \frac{i}{kR} \right)^{-1} \sum_{j=1}^3 (P^j \boldsymbol{\varepsilon}_K^m)^t (P^j \boldsymbol{\varepsilon}_K^l) \quad (3.10g)$$

### 3.5 Système d'équations

La forme discrète finale de l'équation de Helmholtz en 3D conduit après assemblage à la résolution du système d'équations linéaires identiques à celui donnée par l'équation (2.63).

$$A \mathbf{p} = \mathbf{r} \quad (3.11)$$

Cette fois-ci l'effet de la condition DtN dans le schéma de discrétisation par éléments finis standard induit deux matrices complexes dans la matrice globale, une de masse et l'autre de rigidité  $\mathbf{A}$ .

## CHAPITRE 4

### STRUCTURES ÉLASTO-DYNAMIQUES

#### 4.1 Mécanique des solides élastiques

##### 4.1.1 Équation d'équilibre

Considérons un solide soumis à l'action de forces volumiques  $f_v(x, t)$ . L'équilibre d'un élément de volume  $d\Omega$  au voisinage d'un point P d'accélération  $\rho_s \ddot{x}(x, t)$ , en coordonnées cartésiennes, est régi par les équations:

$$\sigma_{ij,j} + f_{v_i} = \rho_s u_{i,tt} \quad \text{où } i, j = 1, 2, 3 \quad (4.1)$$

##### 4.1.2 Loi de comportement

Pour les matériaux élastiques linéaires, les contraintes sont des fonctions linéaires des déformations. Elles sont traduites par la relation suivante :

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (4.2)$$

De plus un matériau est dit isotrope si le tenseur  $[C]$  reste invariant même si on change de repère. Il n'est alors fonction que de deux paramètres à savoir  $\lambda$  et  $G$  (appelés coefficients de Lamé).

Dans ce cas les relations contraintes-déformations s'écrivent :

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{ll} \delta_{ij} + 2G \varepsilon_{ij} \quad \text{où } i, j = 1, 2, 3 \quad (4.3)$$

avec :

$$\lambda = \frac{Ev}{(1+v)(1-2v)} \quad (4.4a)$$

et

$$G = \frac{E}{2(1+v)} \quad (4.4b)$$

E et v désignent respectivement le module de Young et le coefficient de Poisson.  $\lambda$  est le module volumétrique et G est le module de cisaillement.

#### 4.1.3 Relation déformation-déplacement

Sous l'action des forces de volume et de surface le solide se déplace et se déforme. Nous supposons que les gradients de déplacement et les déplacements  $u_i$  sont petits par rapport aux dimensions du solide. Dans ces conditions les déformations sont reliées aux déplacements par l'équation linéaire suivante :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad \text{où } i, j = 1, 2, 3 \quad (4.5)$$

#### 4.1.4 Équation d'équilibre modifiée

En tenant compte des deux équations de comportement et déformation-déplacement, nous avons ce qui suit :

$$\begin{aligned} \sigma_{ij,j} &= (\lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2G \varepsilon_{ij})_{,j} \Rightarrow \sigma_{ij,j} = \lambda \varepsilon_{kk,j} \delta_{ij} + 2G \varepsilon_{ij,j} \\ &\Rightarrow \sigma_{ij,j} = G u_{i,jj} + (\lambda + G) u_{k,ki} \end{aligned} \quad (4.6)$$

Ce qui permet d'écrire l'équation d'équilibre comme suit :

$$G u_{i,jj} + (\lambda + G) u_{k,ki} + f_{v_i} = \rho_s u_{i,tt} \quad (4.7)$$



Sachant que :

$$u_{i,jj} = \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} \quad \text{et} \quad u_{j,ji} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial}{\partial x_j} u_j \right) \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (4.8)$$

L'équation (4.7) s'écrira en notation vectorielle :

$$G \Delta \mathbf{u} + (\lambda + G) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mathbf{f}_v = \rho_s \mathbf{u}_{,tt} \quad (4.9)$$

#### 4.1.5 Décomposition de Helmholtz vectorielle

Si on introduit la notion de potentiel scalaire  $\Phi$  et du potentiel vectoriel  $\Psi$  nous pouvons alors écrire le vecteur déplacement  $\mathbf{u}$  en terme  $\Phi$  et  $\Psi$  :

$$\mathbf{u} = \nabla \Phi + \nabla \times \Psi \quad (4.10)$$

En remplaçant (10) dans (9), pour  $\mathbf{f}_v = \mathbf{0}$  nous obtenons :

$$\begin{aligned} G \Delta (\nabla \Phi + \nabla \times \Psi) + (\lambda + G) \nabla (\nabla \cdot (\nabla \Phi + \nabla \times \Psi)) &= \rho_s (\nabla \Phi + \nabla \times \Psi)_{,tt} \\ &= \rho_s (\nabla \Phi_{,tt} + \nabla \times \Psi_{,tt}) \\ \Leftrightarrow G \Delta (\nabla \Phi) + G \Delta (\nabla \times \Psi) + (\lambda + G) \underbrace{(\nabla (\nabla^2 \Phi) + \nabla (\nabla \cdot (\nabla \times \Psi)))}_{=0} &= \rho_s \nabla \Phi_{,tt} + \rho_s \nabla \times \Psi_{,tt} \\ \Leftrightarrow \nabla (G \Delta \Phi - \rho_s \Phi_{,tt} + (\lambda + G) \Delta \Phi) + \nabla \times (G \Delta \Psi - \rho_s \Psi_{,tt}) &= 0 \\ \Leftrightarrow \nabla ((\lambda + 2G) \Delta \Phi - \rho_s \Phi_{,tt}) + \nabla \times (G \Delta \Psi - \rho_s \Psi_{,tt}) &= 0 \end{aligned} \quad (4.11)$$

La dernière équation ne sera satisfaite que si et seulement si [17] :

$$\begin{cases} (\lambda + 2G) \Delta \Phi - \rho_s \Phi_{,tt} = 0 \\ G \Delta \Psi - \rho_s \Psi_{,tt} = 0 \end{cases} \quad (4.12)$$

ou encore :

$$\begin{cases} \Phi_{,tt} - \alpha^2 \Delta \Phi = 0 \\ \Psi_{,tt} - \beta^2 \Delta \Psi = 0 \end{cases} \quad (4.13)$$

avec :

$$\begin{cases} \alpha = \left( \frac{\lambda + 2G}{\rho_s} \right)^{\frac{1}{2}} \\ \beta = \left( \frac{G}{\rho_s} \right)^{\frac{1}{2}} \end{cases} \quad (4.14)$$

Les deux équations du système (4.13) correspondent à celle des ondes de propagation dans le solide.

**Etude du Cas où il n'y a pas de cisaillement  $G=0$  :**

Nous savons que la contrainte moyenne vaut :  $\sigma_m = \frac{1}{3} \sigma_{ii}$  où  $i=1,2,3$  (4.15)

L'équation (4.3) permet de définir la déformation volumétrique  $\varepsilon_v = \varepsilon_{ii}$  par :

$$\sigma_m = \sigma_{ii} = \frac{1}{3} (\lambda \delta_{ii} \varepsilon_{kk} + 2G \varepsilon_{ii}) = \frac{1}{3} (3\lambda \varepsilon_{kk} + 2G \varepsilon_v) = \frac{1}{3} (3\lambda + 2G) \varepsilon_v \quad (4.16)$$

et le module de compression hydrostatique par :  $B = \frac{1}{3} (3\lambda + 2G)$

$$\text{Si } G=0 \Rightarrow \lambda=B \quad (4.17)$$

Dans ces conditions, l'équation (4.13a) se réduit à celle de l'équation d'onde :

$$\Phi_{,tt} - \frac{B}{\rho_s} \Delta \Phi = 0 \quad (4.18)$$

et la vitesse acoustique est donnée alors par :

$$c = \sqrt{\frac{B}{\rho_s}} \quad (4.19)$$

À noter que dans un milieu élastique acoustique, les ondes sont toutes compressibles en plus il permet leurs cisaillements ( $G \neq 0$ ).

Pour le cas d'un champ temporel harmonique les équations d'ondes élastiques conduisent à celles de Helmholtz.

$$\begin{cases} (\Phi(\mathbf{x},t)e^{-i\omega t})_{tt} - \alpha^2 \Delta (\Phi(\mathbf{x},t)e^{-i\omega t}) = 0 \\ (\Psi(\mathbf{x},t)e^{-i\omega t})_{tt} - \beta^2 \Delta (\Psi(\mathbf{x},t)e^{-i\omega t}) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \Phi + k_\alpha^2 \Phi = 0 \\ \Delta \Psi + k_\beta^2 \Psi = 0 \end{cases} \quad (4.20)$$

avec :  $k_\alpha = \frac{\omega}{\alpha}$  et  $k_\beta = \frac{\omega}{\beta}$

#### 4.2 Formulation faible du problème structural traité en temporel

Considérons le problème d'élasticité en mode harmonique d'une structure (c'est à dire  $\rho_s \ddot{\mathbf{u}} = \rho_s \omega^2 \mathbf{u}$ ), il consiste à trouver  $\mathbf{u} \in H^1(\Omega^S)$  qui satisfait :

$$\begin{cases} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \omega^2 \rho_s \mathbf{u} = \mathbf{f} & \text{sur } \Omega^S \\ \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = -\mathbf{p} \mathbf{n} = \mathbf{T} & \text{sur } \Gamma \end{cases} \quad (4.21)$$

Pour obtenir la formulation faible correspondante, nous multiplions l'équation (4.21a) par une fonction vectorielle complexe test  $\mathbf{v}$  et ensuite nous intégrons par partie.

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^S} (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \omega^2 \rho_s \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} \, d\Omega^S &= \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, d\Omega^S \\ \stackrel{\text{Théorème de Gauss}}{\Leftrightarrow} \int_{\Gamma} (\boldsymbol{\sigma}_i \mathbf{v}_i) \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma + \int_{\Omega^S} (-\boldsymbol{\sigma}_i \nabla v_i + \omega^2 \rho_s \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \, d\Omega^S &= \int_{\Omega^S} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, d\Omega^S \\ \Leftrightarrow \int_{\Gamma} (\boldsymbol{\sigma}_i \cdot \mathbf{n}) v_i \, d\Gamma + \int_{\Omega^S} (-\boldsymbol{\sigma}_i \nabla v_i + \omega^2 \rho_s \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \, d\Omega^S &= \int_{\Omega^S} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, d\Omega^S \quad (4.22) \\ \stackrel{\text{Equation (b)}}{\Leftrightarrow} \int_{\Gamma} \mathbf{T} \cdot \mathbf{v} \, d\Gamma + \int_{\Omega} (-\boldsymbol{\sigma}_i \nabla v_i + \omega^2 \rho_s \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \, d\Omega^S &= \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, d\Omega^S \\ \Leftrightarrow \int_{\Omega^S} (\boldsymbol{\sigma}_i \nabla v_i - \omega^2 \rho_s \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \, d\Omega^S &= \int_{\Gamma} \mathbf{T} \cdot \mathbf{v} \, d\Gamma - \int_{\Omega^S} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, d\Omega^S \end{aligned}$$

La première intégrale de gauche donne ce qui suit :

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega^s} \sigma_i \nabla v_i d\Omega^s &= \int_{\Omega^s} \sigma \nabla \cdot \mathbf{v} d\Omega^s = \int_{\Omega^s} (\lambda I (\nabla \cdot \mathbf{u}) + 2G \varepsilon) \nabla \cdot \mathbf{v} d\Omega^s \\
 &= \int_{\Omega^s} (\lambda I (\nabla \cdot \mathbf{u}) (\nabla \cdot \mathbf{v}) + G ((\nabla \cdot \mathbf{u}) + (\nabla \cdot \mathbf{u})^t) (\nabla \cdot \mathbf{v})) d\Omega^s \quad (4.23) \\
 &= \int_{\Omega^s} (\lambda I (\nabla \cdot \mathbf{u}) (\nabla \cdot \mathbf{v}) + 2G \varepsilon(\mathbf{u}) : \varepsilon(\mathbf{v})) d\Omega^s
 \end{aligned}$$

Puisque :

$$\begin{aligned}
 2((\nabla \cdot \mathbf{u}) + (\nabla \cdot \mathbf{u})^t) (\nabla \cdot \mathbf{v}) &= ((\nabla \cdot \mathbf{u}) + (\nabla \cdot \mathbf{u})^t) (\nabla \cdot \mathbf{v}) + ((\nabla \cdot \mathbf{u}) + (\nabla \cdot \mathbf{u})^t) (\nabla \cdot \mathbf{v}) \\
 &= \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \\
 &\stackrel{\text{iet j sont}}{\text{muées}} = \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \quad (4.24) \\
 &= \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \\
 &= ((\nabla \cdot \mathbf{u}) + (\nabla \cdot \mathbf{u})^t) ((\nabla \cdot \mathbf{v}) + (\nabla \cdot \mathbf{v})^t) \\
 &= 2\varepsilon(\mathbf{u}) : 2\varepsilon(\mathbf{v})
 \end{aligned}$$

ou encore :  $(\nabla \cdot \mathbf{u}) + (\nabla \cdot \mathbf{u})^t = 2\varepsilon(\mathbf{u}) : \varepsilon(\mathbf{v})$

Remplaçant (4.23) et (4.24) dans (4.22) nous obtenons :

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega^s} (\lambda I (\nabla \cdot \mathbf{u}) (\nabla \cdot \mathbf{v}) + 2G \varepsilon(\mathbf{u}) : \varepsilon(\mathbf{v})) d\Omega^s - \int_{\Omega^s} \omega^2 \rho_s \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} d\Omega^s \\
 = \int_{\Gamma} \mathbf{T} \cdot \mathbf{v} d\Gamma - \int_{\Omega^s} \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} d\Omega^s \quad (4.25)
 \end{aligned}$$

### 4.3 Discrétisation en éléments finis

La discrétisation de l'équation (4.25) est obtenue en remplaçant  $\Omega^s$  par un ensemble fini de volume  $\Omega_e^s \subset \Omega^s$ . Dans ce cas, nous pouvons utiliser une approximation de  $\mathbf{u}$  par éléments finis sur chaque volume  $\Omega_e^s$  :

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^m \mathbf{u}_i \phi_i$$

où  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_m$  est une base d'approximation.

Ce qui permet d'écrire après discrétisation :

$$(\mathbf{K}^S - \omega^2 \mathbf{M}^S) \mathbf{u} = \mathbf{s} \quad (4.26)$$

avec :

$$\mathbf{u}^t \mathbf{K}^S \mathbf{v} = \sum_{e=1}^{n_{es}} \int_{\Omega_e^S} (\lambda I (\nabla \cdot \mathbf{u})(\nabla \cdot \mathbf{v}) + 2 G \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})) d\Omega_e^S \quad (4.27a)$$

$$\mathbf{u}^t \mathbf{M}^S \mathbf{v} = \sum_{e=1}^{n_{es}} \int_{\Omega_e^S} \rho_s \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} d\Omega_e^S \quad (4.27b)$$

$$\mathbf{u}^t \mathbf{s} = \sum_{e=1}^{n_{es}} \left( \int_{\Gamma_e} \mathbf{T} \cdot \mathbf{v} d\Gamma - \int_{\Omega_e^S} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} d\Omega_e^S \right) \quad (4.27c)$$

$\mathbf{K}^S$ ,  $\mathbf{M}^S$ ,  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{s}$  représentent respectivement la matrice de rigidité, la matrice de masse, le vecteur nodal et le vecteur des sollicitations global.

#### 4.4 Système d'équations

Ici encore la discrétisation induit après assemblage à la résolution du système d'équations linéaires (4.28) :

$$\mathbf{A} \mathbf{u} = \mathbf{s} \quad (4.28)$$

avec : 
$$\mathbf{A} = \mathbf{K}^S - \omega^2 \mathbf{M}^S \quad (4.29)$$

Ce système ne sera pas traité directement comme pour le cas de la partie fluide mais sera résolu par la méthode d'analyse modale.

#### 4.5 Analyse modale pour le calcul du déplacement

L'équation d'équilibre régissant la structure, après avoir appliqué la méthode des éléments finis (4.29), est de la forme :

$$\mathbf{M}^S \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}^S \mathbf{u} = \mathbf{s} \quad (4.30)$$

Elle est représentée par un système d'équations linéaires couplées. La transformation :

$$\mathbf{u} = \mathbf{P} \mathbf{v} \quad (4.31)$$

permet de découpler (4.30).

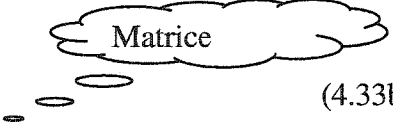
La matrice de transformation  $\mathbf{P}$  est constituée par les  $m$  vecteurs propres  $\mathbf{P}_i$  définis par :

$$\mathbf{K} \mathbf{P}_i - \omega_i^2 \mathbf{M} \mathbf{P}_i = \mathbf{0} \quad \text{pour } i=1,2,\dots,m \quad (4.32a)$$

et 
$$\mathbf{P} = \langle \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \dots \mathbf{P}_m \rangle \quad (4.32b)$$

La matrice  $\mathbf{P}$  satisfait les relations d'orthogonalité suivantes :

$$\textcircled{1} \quad \mathbf{P}^T \mathbf{M} \mathbf{P} = \mathbf{I} \quad (4.33a)$$

$$\textcircled{2} \quad \mathbf{P}^T \mathbf{K} \mathbf{P} = \boldsymbol{\lambda} = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & & 0 \\ & \omega_2^2 & \\ 0 & & \omega_m^2 \end{bmatrix} \quad (4.33b)$$


En tenant compte de (4.31) le système (4.30) se transforme ainsi en :

$$\mathbf{M} \mathbf{P} \ddot{\mathbf{v}} + \mathbf{K} \mathbf{P} \mathbf{v} = \mathbf{f} \quad (4.34)$$

Multiplions l'équation (6) par  $[\mathbf{P}]^T$ , nous obtenons :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^T \mathbf{M} \mathbf{P} \ddot{\mathbf{v}} + \mathbf{P}^T \mathbf{K} \mathbf{P} \mathbf{v} &= \mathbf{P}^T \mathbf{f} \\ \mathbf{I} \ddot{\mathbf{v}} + \boldsymbol{\lambda} \mathbf{v} &= \mathbf{P}^T \mathbf{f} \end{aligned} \quad (4.35)$$

À ce niveau, nous pouvons utiliser notre convention de temps-harmonique qui stipule que les variables du problème en régime harmonique s'écrivent sous la forme :

$$\mathbf{v} = \tilde{\mathbf{v}} e^{j\omega_r t} \quad (4.36a)$$

et sachant que :

$$\mathbf{f} = \tilde{\mathbf{f}} e^{j\omega_f t} \quad (4.36b)$$

L'équation (4.35) se simplifie à :

$$(\lambda - \omega_f^2 \mathbf{I}) \tilde{\mathbf{v}} = \tilde{\mathbf{f}} \quad (4.37)$$

(4.37) s'écrit sous la forme indicielle suivante :

$$(\omega_i^2 - \omega_f^2) \tilde{v}_i = \tilde{f}_i \quad \text{pour } i=1,2,\dots,m \quad (4.38)$$

Connaissant le vecteur d'amplitude  $\tilde{\mathbf{f}}$  de l'excitation  $\mathbf{f}$ , les pulsations propres de la structure et la pulsation du fluide, nous pouvons calculer l'amplitude  $\tilde{\mathbf{v}}$ , comme le montre l'équation (4.39), et par la suite la valeur de  $\mathbf{v}$  selon (4.36a).

$$\boxed{\tilde{v}_i = \frac{1}{\omega_i^2 - \omega_f^2} \tilde{f}_i \quad \text{avec } \omega_i \neq \omega_f} \quad (4.39)$$

Par le biais de (4.32b) et (4.31) nous déduisons la valeur de  $\mathbf{u}$ .

## CHAPITRE 5

### COUPLAGE ÉLASTO-ACOUSTIQUE

#### 5.1 Position du problème

Lorsque deux ou plusieurs systèmes physiques interagissent, la solution de n'importe quel système n'est possible sans la solution simultanée des autres systèmes. De tels systèmes sont appelés systèmes couplés et le couplage peut être faible ou fort selon le degré d'interaction. Les interactions fluide-structure constituent un cas de systèmes couplés. Il existe deux catégories de systèmes couplés :

Classe I : elle concerne tous les problèmes dans lesquels le couplage intervient sur les domaines d'interfaces par le biais des conditions aux frontières. En général, les domaines décrivent différentes situations physiques; mais il est possible de ne considérer dans cette classe que les domaines qui sont physiquement similaires et/ou de différentes discrétisations sont utilisées.

Classe II : elle concerne les problèmes où une variété de domaines se chevauchent totalement ou partiellement. Ici le couplage intervient par le biais d'équations différentielles décrivant les différents phénomènes physiques. Par exemple, les interactions fluides-structures sont de classe I et les interactions plastiques- métaux rencontrés dans une extrudeuse ou sol poreux-fluides sont de classe II.

Lorsqu'une structure élastique vibre en présence d'un fluide acoustique tel que l'eau ou l'air, il y a interaction entre les ondes élastiques et acoustiques. Dans ce cas il faut résoudre simultanément les équations de mouvements de la structure et du fluide qui sont liées au niveau des surfaces d'interaction par deux conditions de couplage qui traduisent la continuité de la composante normale du déplacement et des contraintes à la traversée de ces surfaces.



## 5.2 Problème harmonique

On distingue sur le plan temporel deux types de problèmes correspondant à deux régimes physiquement différents :

- régime transitoire et
- régime permanent, ou régime stationnaire harmonique

Généralement, le régime transitoire correspond à un comportement de l'objet étudié en un laps de temps relativement court et nécessite une discrétisation dans le temps.

Le régime permanent correspond, par contre, à un comportement identique dans le temps de l'objet à étudier.

Dans le cadre de ce mémoire, nous nous intéressons qu'au cas stationnaire harmonique. La solution que nous souhaitons chercher, en respectant la convention temps-harmonique, s'écrira sous forme de variables séparées. Ainsi, le champ scalaire  $F(\mathbf{x}, t)$  qui dépend de la position  $\mathbf{x}$  et du temps  $t$  s'écrira sous la forme  $F(\mathbf{x}) e^{-i\omega t}$ .

### 5.2.1 Hypothèses physiques

Pour étudier la diffraction élastique nous considérons les hypothèses suivantes tout en se référant à la figure ci-après:

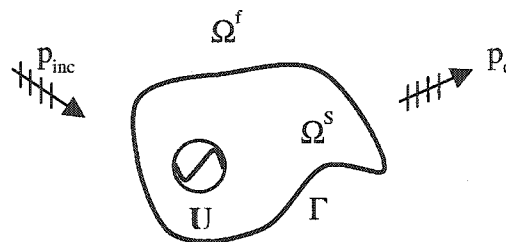


Figure 10 Configuration générale du problème d'interaction fluide structure

**Espace :**

Soit un obstacle solide  $\Omega^s \in \mathbf{R}^3$  délimité par  $\Gamma$  (appelée aussi surface mouillée) et entouré par le domaine fluide  $\Omega^f = \overline{\Omega^s} \in \mathbf{R}^3$  voir figure 10. On suppose que les ondes réfléchies sont absorbées à l'infini.

**Matériau :**

Le fluide est supposé parfait, compressible, homogène, de densité  $\rho_f$  et de célérité  $c$ . Le solide est considéré comme rigide et linéairement élastique; sa densité est  $\rho_s$ . Le champ scalaire de pression dans le fluide est dénoté par  $P(\mathbf{x}, t)$  alors que le champ vecteur de déplacement dans le solide est dénoté par  $\mathbf{U}(\mathbf{x}, t)$ .

**Temps :**

Toutes les ondes sont en état permanent (temps harmonique) avec une pulsation  $\omega$  et satisfont la convention de séparation des variables temporelle et spatiale.

**Magnitude des amplitudes :**

Les amplitudes des oscillations dans le solide et le fluide sont supposées faibles.

**Charge :**

Nous avons deux situations : Soit qu'un champ acoustique incident est émis depuis le fluide  $\Omega^f$  ou le solide est soumis à une force excitatrice harmonique  $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{F}(\mathbf{x}) e^{-i\omega t}$ .

**Repère :**

Le système de coordonnées cartésiennes est supposé fixe dans  $\mathbf{R}^3$  et l'approche que nous adopterons est une approche Lagrangienne globale.

L'objectif souhaité est de déterminer le champ acoustique stationnaire diffracté de la pression  $p(\mathbf{x})$  en tous points de  $\Omega^f$ .

Il est à noter que cette solution est complexe et c'est uniquement la partie réelle de  $P(\mathbf{x}, t) = p(\mathbf{x}) e^{-i\omega t}$  qui a un intérêt physique. Nous avons donc :

$$\begin{aligned} \text{Re}(P) &= \text{Re}(p(\mathbf{x}) e^{-i\omega t}) \\ &= \text{Re}(\text{Re}(p) \cos(\omega t) + \text{Im}(p) \sin(\omega t)) \\ &= |p(\mathbf{x})| \sin(\omega t + \phi) \end{aligned} \quad (5.1)$$

avec :

$$\phi = \arctan\left(\frac{\text{Re}(p)}{\text{Im}(p)}\right) \quad (5.2)$$

On voit bien que l'amplitude de la solution physique n'est autre que la valeur absolue de la solution stationnaire, alors que  $\phi$  représente sa phase.

### 5.2.2 Conditions à l'interface

Considérons l'interaction entre un corps élastique (cible) et un fluide non visqueux et compressible. La cible est couplée au fluide, qui occupe un domaine extérieur illimité  $\Omega^f$ , via son interface  $\Gamma^s$ . En fait, les deux milieux sont physiquement liés de deux manières distinctes.

Le premier lien se fait à travers les conditions cinématiques de frontière qui assurent la continuité de la frontière entre le liquide et le solide : la vitesse normale du fluide d'un coté de l'interface doit égaliser la vitesse normale du solide de l'autre coté de l'interface (il n'y a pas de composante tangentiel de la vitesse puisque le fluide est considéré parfait et dès lors il peut glisser sur la surface du solide).

Le second lien se fait à travers les conditions dynamiques de frontière, résultant de l'équilibre des forces sur toute  $\Gamma^S$  : chaque élément de frontière est sans masse, ce qui implique l'équilibre des forces.

Nous supposons qu'une onde acoustique incidente, à dépendance harmonique du temps, est envoyée vers la cible et nous nous proposons de déterminer sa réponse et l'onde diffractée.

Considérons un point arbitraire  $P$  de la surface mouillée  $\Gamma$ . Soit  $\mathbf{n}$  la normale unitaire sortante et  $\mathbf{t}_1$  un vecteur unitaire tangent à  $\Gamma$  tous les deux définis au point  $P$ .

Pour une base locale orthonormée dans  $\mathbf{R}^3$ , nous définissons un vecteur unitaire  $\mathbf{t}_2$ , comme illustré par le schéma :

$$\mathbf{t}_2 = \frac{\mathbf{n} \wedge \mathbf{t}_1}{|\mathbf{n} \wedge \mathbf{t}_1|} \quad (5.3)$$

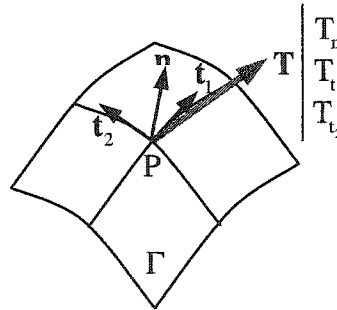


Figure 11 Repère orthonormé local

### 5.2.3 Condition dynamique

La traction  $\mathbf{T}$  a pour composantes dans la base locale  $(\mathbf{n}, \mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2)$  :  $\{T_n, T_{t_1}, T_{t_2}\}^t$ .

La pression est en équilibre statique avec la traction normale au frontière du solide :

$$-(p + p_{inc}) = T_n \quad (5.4)$$

où la pression incidente  $p_{inc}$  est connue et  $p$  est la pression diffractée.

Comme nous avons supposé que le fluide est parfait, ceci implique une absence de traction tangentielle sur la frontière :

$$T_{t_1} = T_{t_2} = 0 \quad (5.5)$$

Les composantes de la traction  $\mathbf{T}$  dans la base locale sont reliées à celles dans la base cartésienne globale par la transformation orthonormée suivante :

$$T_i = \sigma_{ij} n_j \quad (5.6)$$

où  $n_j$  sont les cosinus directeurs de la normale  $\mathbf{n}$  par rapport au repère cartésien.

Nous avons donc :

$$\mathbf{T} = \{ T_n, 0, 0 \}_{(n, t_1, t_2)}$$

Et :

$$T_n = \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} = T_i n_i = \sigma_{ij} n_i n_j \quad (5.7)$$

Ce qui permet d'écrire la condition d'équilibre de pression en terme de contrainte normale :

$$\sigma_{ij} n_i n_j = -(p + p_{inc}) \quad (5.8)$$

#### 5.2.4 Condition cinématique

Les déplacements normaux du solide et du fluide sont égaux au niveau de la surface mouillée, en effet :

$$\begin{aligned}
\rho_f \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} &= -\nabla(p + p_{\text{inc}}) \Rightarrow \rho_f \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} = -\nabla(p + p_{\text{inc}}) \cdot \mathbf{n} \\
&\Rightarrow \rho_f \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \cdot \mathbf{n} = -\nabla(p + p_{\text{inc}}) \cdot \mathbf{n} \\
&\stackrel{\substack{\mathbf{u} \\ \text{harmonique}}}{\Rightarrow} \rho_f \omega^2 \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = \frac{\partial(p + p_{\text{inc}})}{\partial n}
\end{aligned} \tag{5.9}$$

$\mathbf{V}$  est la vitesse et  $\mathbf{u}$  est le déplacement des point d'interface.

Nous pouvons aussi tirer une relation qui relie la dérivée normale de la vitesse à la dérivée normale de la pression comme suit :

$$\begin{aligned}
\rho_f \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} &= -\nabla(p + p_{\text{inc}}) \Rightarrow \rho_f \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} = -\nabla(p + p_{\text{inc}}) \cdot \mathbf{n} \\
&\stackrel{\substack{\mathbf{V} \\ \text{harmonique}}}{\Rightarrow} -i \omega \rho_f \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} = \frac{\partial(p + p_{\text{inc}})}{\partial n} \\
&\Rightarrow -i \omega \rho_f v_n = \frac{\partial(p + p_{\text{inc}})}{\partial n}
\end{aligned} \tag{5.10}$$

### 5.3 Équations gouvernantes

Les équations qui régissent le mouvement de la structure, comme il est illustré par la figure, sont :

▸ Quantité de mouvement :

$$\sigma_{i,j,j} + f_i - \rho_s \ddot{u}_i = 0 \tag{5.11a}$$

▸ Relations déformation-déplacement linéaires :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \tag{5.11b}$$

▸ Loi de comportement de Hook :

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \tag{5.11c}$$

► Conditions aux limites dans le cas général :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{ij} n_i = -(p + p_{inc}) \end{array} \right. \quad (5.11d)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_f \omega^2 \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = \frac{\partial(p + p_{inc})}{\partial n} \end{array} \right. \quad \text{sur } \Gamma_{\text{interface fluide}} \quad (5.11e)$$

$$u_i = \bar{u}_i \quad \text{sur } \Gamma_u \quad (5.11f)$$

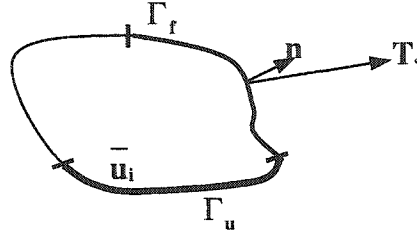


Figure 12 Configuration du problème d'élastoacoustique

Le mouvement du système fluide-structure autour de son état d'équilibre est régi par le système d'équations (5.12) qui représentent les équations de mouvements harmoniques du système couplé en termes de l'amplitude de la pression acoustique diffractée  $p$  et de l'amplitude du déplacement  $\mathbf{u}$  de la structure qui est supposée élastique, linéaire et harmonique (sans (5.11f)). Le problème (5.12) représente le rayonnement d'un corps élastique plongé dans un milieu acoustique linéaire qui s'étend à l'infini. C'est un problème mathématiquement bien posé et admet une solution unique [17].

La solution du problème (5.12) revient donc à déterminer les variables  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  et  $p(\mathbf{x}, t)$  qui représentent respectivement le champ du déplacement de la structure et le champ de pression dans le fluide.

**STRUCTURE**

Equation

$$\sigma_{ij,j} - \rho_s \ddot{U}_i = -f_i \quad \xRightarrow{\text{Eq harmonique}} \quad \left. \frac{\partial \sigma_{ij,j}}{\partial x_j} = -\rho_s \omega^2 U_i - f_i \right\} \text{ sur } \Omega^s \quad (5.12a)$$

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \frac{\partial U_k}{\partial x_l} \quad (5.12b)$$

Condition au Limite

$$\sigma_{ij} n_i n_j + p = -p_{inc} \quad \text{sur } \Gamma^s \quad (5.12c)$$

**FLUIDE**

Equation

$$\Delta p + k^2 p = 0 \quad \text{sur } \Omega^f \quad (5.12d)$$

Conditions aux Limites

$$\rho_f \omega^2 \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} - \frac{\partial p}{\partial n} = \frac{\partial p_{inc}}{\partial n} \quad \text{sur } \Gamma^s \quad (5.12e)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r^{-\left(\frac{d-1}{2}\right)} \left( \frac{\partial}{\partial r} + i k \right) p = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial p}{\partial r} + i k p = o \left( r^{-\frac{d-1}{2}} \right) \quad r \rightarrow \infty \quad (5.12f)$$

**Cas spéciaux [17] :**

- $\mathbf{u} = \mathbf{0}$  correspond à la diffraction rigide régie par les équations (5.12c, d et f).
- Si  $T_n = 0$  correspond à une diffraction régie par les équations (5.12c, e et f).
- Si  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$  et  $p_{inc} = 0$  correspond à une onde libre se propageant dans l'espace régie par les équations (5.12c et f).
- Si  $p_{inc} = 0$  correspond au rayonnement sonore d'un corps élastique vibrant dans le fluide régie par toutes les équations (5.12a..f).
- Si  $p_{inc} = p = 0$  correspond à la vibration d'un corps élastique régie par (5.12a à c).



#### 5.4 Formulation faible du couplage élastoacoustique

Nous supposons que la structure est un solide élastique continu (le cas général est celui de solide ayant une ou plusieurs cavités). Du moment que le problème (5.12) est composé d'équations de structure et de celles relatives au problème extérieur de Helmholtz, appliquer la formulation faible au couplage élastoacoustique revient donc à formuler le principe variationnel pour les deux problèmes séparément et ensuite additionner les deux forme intégrales.

L'expression variationnelle de la structure est donnée par (équation (4.25) chapitre 4, que nous rappelons ici) :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^s} (\lambda I (\nabla \cdot \mathbf{u}) (\nabla \cdot \mathbf{v}) + 2\mu \varepsilon(\mathbf{u}) : \varepsilon(\mathbf{v})) d\Omega^s - \int_{\Omega^s} \omega^2 \rho_s \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} d\Omega^s \\ = - \int_{\Gamma^s} \mathbf{T} \cdot \mathbf{v} d\Gamma - \int_{\Omega^s} \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} d\Omega^s \end{aligned} \quad (5.13)$$

en tenant compte de (5.12e) nous déduisons l'expression équivalente à (5.13).

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^s} (\lambda I (\nabla \cdot \mathbf{u}) (\nabla \cdot \mathbf{v}) + 2\mu \varepsilon(\mathbf{u}) : \varepsilon(\mathbf{v}) - \omega^2 \rho_s \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) d\Omega^s \\ = \int_{\Gamma^s} (p + p_{inc}) \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} d\Gamma - \int_{\Omega^s} \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} d\Omega^s \end{aligned} \quad (5.14)$$

Alors que celle du problème d'Helmholtz tronqué (équation (2.57) en 2D du chapitre 2 et équations (3.5 & 7) du chapitre 3 que nous rappelons ici) est donnée par :

$$\int_{\Omega^f} (\nabla q \nabla p - k^2 q \cdot p) d\Omega^f - \int_{S_R} q M p d\Gamma = \int_{\Gamma^s} g q d\Gamma \quad (5.15)$$

Dans ce cas la fonction  $g$  a pour expression :

$$g = \rho_f \omega^2 \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} - \frac{\partial p_{inc}}{\partial n} \quad (5.16)$$

Ajoutons l'expression de l'équation (5.14) à celle de l'équation (5.15) tout en tenant compte de (5.16), nous obtenons ce qui suit :

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} (\nabla q \nabla p - k^2 q \cdot p) d\Omega - \int_{S_R} q M p d\Gamma \\
& + \int_{\Omega^s} (\lambda I (\nabla \cdot \mathbf{u}) (\nabla \cdot \mathbf{v}) + 2\mu \varepsilon(\mathbf{u}) : \varepsilon(\mathbf{v}) - \omega^2 \rho_s \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) d\Omega^s \\
& = \int_{\Gamma^s} (\rho_f \omega^2 \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} - \frac{\partial p_{inc}}{\partial n}) q d\Gamma + \int_{\Gamma^s} (p + p_{inc}) \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} d\Gamma \\
& - \int_{\Omega^s} \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} d\Omega^s \\
& \int_{\Omega} \nabla q \nabla p d\Omega - \int_{\Omega} k^2 q \cdot p d\Omega - \int_{S_R} q M p d\Gamma \\
& \quad \rightarrow \text{matrice rigidité fluide} \quad \rightarrow \text{matrice masse fluide} \quad \rightarrow \text{matrice rigidité frontière artificielle} \\
& + \int_{\Omega^s} (\lambda I (\nabla \cdot \mathbf{u}) (\nabla \cdot \mathbf{v}) + 2\mu \varepsilon(\mathbf{u}) : \varepsilon(\mathbf{v})) d\Omega^s \\
& \quad \rightarrow \text{matrice rigidité structure} \\
& - \int_{\Omega^s} \rho_s \omega^2 \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} d\Omega^s - \int_{\Gamma^s} p \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} d\Gamma - \int_{\Gamma^s} \rho_f \omega^2 \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} q d\Gamma \quad (5.17) \\
& \quad \rightarrow \text{matrice masse structure} \quad \rightarrow \text{matrice couplage fluide-structure} \quad \rightarrow \text{matrice couplage fluide-structure} \\
& = - \int_{\Gamma^s} \frac{\partial p_{inc}}{\partial n} q d\Gamma + \int_{\Gamma^s} p_{inc} \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} d\Gamma - \int_{\Omega^s} \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} d\Omega^s \\
& \quad \rightarrow \text{terme de second membre fluide} \quad \rightarrow \text{terme de second membre structure}
\end{aligned}$$

### 5.5 Discrétisation par éléments finis

La discrétisation de l'équation (5.17) est obtenue en remplaçant  $\Omega^s$  et  $\Omega^f$  respectivement par un ensemble fini de volume  $\Omega_e^s \subset \Omega^s$  pour la structure et  $\Omega_e^f \subset \Omega^f$  pour le domaine fluide tronqué. Dans ce cas nous pouvons utiliser les approximations de  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{p}$  par éléments finis sur chaque volume correspondant ( $\Omega_e^s$  pour la structure et  $\Omega_e^f$  pour le fluide) :

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{m_s} \mathbf{u}_i \phi_i \quad (5.18a)$$

$$\mathbf{p} = \sum_{i=1}^{m_f} \mathbf{p}_i \phi_i \quad (5.18b)$$

Où  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{m_s}$  et  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{m_f}$  représente respectivement une base de  $\Omega_e^s$  et de  $\Omega_e^f$ .

Tout calcul fait nous obtenons le système couplé et linéaire suivant :

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{K}^f + k^2 \mathbf{M}^f - \mathbf{G}^f & \rho_f \omega^2 \mathbf{T} \\ \mathbf{T}^T & -\mathbf{K}^s + \omega^2 \mathbf{M}^s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{r} \\ \mathbf{s} \end{bmatrix} \quad (5.19)$$

où :

$$\mathbf{p}^t \mathbf{K}^f \mathbf{q} = \sum_{e=1}^{n_f} \int_{\Omega_e^f} \nabla \mathbf{p} \cdot \nabla \mathbf{q} \, d\Omega_e^f \quad (5.20a)$$

$$\mathbf{p}^t \mathbf{M}^f \mathbf{q} = \sum_{e=1}^{n_f} \int_{\Omega_e^f} \mathbf{q} \cdot \mathbf{p} \, d\Omega_e^f \quad (5.20b)$$

$$\mathbf{p}^t \mathbf{G}^f \mathbf{q} = \sum_{e=1}^{n_f} \left( - \int_{S_R} \mathbf{q} \cdot \mathbf{M} \mathbf{p} \, dS_R \right) \quad (5.20c)$$

$$\mathbf{u}^t \mathbf{K}^s \mathbf{v} = \sum_{e=1}^{n_s} \int_{\Omega_e^s} (\lambda I (\nabla \cdot \mathbf{u}) (\nabla \cdot \mathbf{v}) + 2\mu \varepsilon(\mathbf{u}) : \varepsilon(\mathbf{v})) \, d\Omega_e^s \quad (5.20d)$$

$$\mathbf{u}^t \mathbf{M}^s \mathbf{v} = \sum_{e=1}^{n_s} \int_{\Omega_e^s} \rho_s \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, d\Omega_e^s \quad (5.20e)$$

$$\mathbf{q}^t \mathbf{T}^t \mathbf{v} = \sum_{e=1}^{n_s} \int_{\Gamma_e} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \, d\Gamma^s \quad (5.20f)$$

$$\mathbf{u}^t \mathbf{s} = \sum_{e=1}^{n_s} \left( - \int_{\Gamma_e} p_{inc} \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \, d\Gamma^s + \int_{\Omega_e^s} \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \, d\Omega_e^s \right) \quad (5.20g)$$

$$\mathbf{q}^t \mathbf{r} = \sum_{e=1}^{n_f} \int_{\Gamma_e} \frac{\partial p_{inc}}{\partial \mathbf{n}} \mathbf{q} \, d\Gamma^f \quad (5.20h)$$

Notons par  $\Omega_G^s = \bigcup_{e=1}^{n_s} \Omega_e^s$  et  $\Omega_G^f = \bigcup_{e=1}^{n_f} \Omega_e^f$ .

Nous aurons en posant :  $\omega^2 \mathbf{M}_G^f = k^2 \mathbf{M}^f - \mathbf{G}^f$  (5.21)

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{K}^s + \omega^2 \mathbf{M}^s & \mathbf{T}^T \\ \rho_f \omega^2 \mathbf{T} & -\mathbf{K}^f + \omega^2 \mathbf{M}_G^f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{s} \\ \mathbf{r} \end{bmatrix} \quad (5.22)$$

Pour une fréquence donnée, le système (5.22) peut être rendu symétrique en divisant sa deuxième équation par le terme  $\rho_f \omega^2$ .

### 5.6 Algorithme de résolution itératif

Le système (5.21) peut être représenté par le système suivant :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{S} & \mathbf{C} \\ \mathbf{C}^T & \mathbf{H} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{q} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{S}\mathbf{u} + \mathbf{C}\mathbf{p} = \mathbf{F} \\ \mathbf{C}^T\mathbf{u} + \mathbf{H}\mathbf{p} = \mathbf{q} \end{cases} \quad (5.23a)$$

où :

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= -\mathbf{K}^s + \omega^2 \mathbf{M}^s \\ \mathbf{H} &= -\frac{1}{\rho_f \omega^2} \mathbf{K}^f + \frac{1}{\rho_f} \mathbf{M}_G^f \\ \mathbf{C} &= \mathbf{T}^T \\ \mathbf{F} &= \mathbf{s} \\ \mathbf{q} &= \frac{1}{\rho_f \omega^2} \mathbf{r} \end{aligned} \quad (5.23b)$$

Nous proposons dans le cas d'une onde incidente depuis le fluide, et où la structure (cas général) est sollicitée par une force  $\mathbf{F}$ , l'algorithme itératif ci-après :

#### 1<sup>ère</sup> itération

##### Fluide

À ce moment là nous avons  $\mathbf{u}_{-1} = \mathbf{0}$  qui est une donnée; l'équation (5.23b) donnera :

$$\mathbf{C}^T \mathbf{u}_{-1} + \mathbf{H} \mathbf{p}_0 = \mathbf{q} \Leftrightarrow \mathbf{H} \mathbf{p}_0 = \mathbf{q} \quad (5.24)$$

Ce qui nous amène à résoudre le problème tronqué de Helmholtz pour  $\mathbf{p}_0$  que nous savons solutionner. En laissant le code Helmholtz tourner jusqu'à la convergence locale dont le critère est désigné par  $\epsilon_H$ , nous obtenons la solution :

$$\mathbf{p}_0 = \mathbf{H}^{-1} \mathbf{q} \quad (5.25)$$

### Structure

(5.25) sera injectée dans l'équation (5.23a) ce qui conduit à la résolution de l'équation :

$$\mathbf{S} \mathbf{u}_0 + \mathbf{C} \mathbf{p}_0 = \mathbf{F} \Leftrightarrow \mathbf{S} \mathbf{u}_0 = \mathbf{F} - \mathbf{C} \mathbf{p}_0 \quad (5.26)$$

Le problème formulé par (5.26) est celui d'une structure dont l'inconnue est le déplacement  $\mathbf{u}_0$  que nous savons aussi résoudre. En laissant le code structure tourner jusqu'à la convergence locale dont le critère est désigné par  $\varepsilon_s$ , nous obtenons la solution :

$$\mathbf{u}_0 = \mathbf{S}^{-1} (\mathbf{F} - \mathbf{C} \mathbf{p}_0) \quad (5.27)$$

### Test de convergence globale

$$\begin{aligned} \text{Et} \quad & \left\| \mathbf{S} \mathbf{u}_0 + \mathbf{C} \mathbf{p}_0 - \mathbf{F} \right\| \leq \varepsilon_{\text{Force}} \\ & \left\| \mathbf{C}^T \mathbf{u}_0 + \mathbf{H} \mathbf{p}_0 - \mathbf{q} \right\| \leq \varepsilon_{\text{pression}} \end{aligned} \quad (5.28)$$

Si oui arrête si non continu.

### 2<sup>ème</sup> itération

#### Fluide

(5.27) sera injectée dans l'équation dans (5.23b) ce qui donne :

$$\mathbf{C}^T \mathbf{u}_0 + \mathbf{H} \mathbf{p}_1 = \mathbf{q} \Leftrightarrow \mathbf{H} \mathbf{p}_1 = \mathbf{q} - \mathbf{C}^T \mathbf{u}_0 \quad (5.29)$$

Ce qui nous ramène une fois de plus à résoudre le problème tronqué de Helmholtz pour  $\mathbf{p}_1$ . En laissant le code Helmholtz tourner jusqu'à la convergence locale, nous obtenons la solution :

$$\mathbf{p}_1 = \mathbf{H}^{-1} \mathbf{q} - \mathbf{H}^{-1} \mathbf{C}^T \mathbf{u}_0 = \mathbf{H}^{-1} (\mathbf{q} - \mathbf{C}^T \mathbf{u}_0) \quad (5.30)$$

### Structure

(5.30) sera injectée dans l'équation (5.23a) ce qui conduit à la résolution de l'équation :

$$\mathbf{S}\mathbf{u}_1 + \mathbf{C}\mathbf{p}_1 = \mathbf{F} \Leftrightarrow \mathbf{S}\mathbf{u}_1 = \mathbf{F} - \mathbf{C}\mathbf{p}_1 \quad (5.31)$$

(5.31) est un problème de structure dont l'inconnue est  $\mathbf{u}_1$ . En laissant le code structure tourner jusqu'à la convergence locale, nous obtenons la solution :

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{S}^{-1} (\mathbf{F} - \mathbf{C}\mathbf{p}_1) \quad (5.32)$$

### Test de convergence globale

$$\begin{aligned} \left\| \mathbf{S}\mathbf{u}_1 + \mathbf{C}\mathbf{p}_1 - \mathbf{F} \right\| &\leq \epsilon_{\text{Force}} \\ \left\| \mathbf{C}^T \mathbf{u}_1 + \mathbf{H}\mathbf{p}_1 - \mathbf{q} \right\| &\leq \epsilon_{\text{pression}} \end{aligned} \quad (5.33)$$

Si oui arrête si non continu....

N.B. La partie de traitement structural est décrite pour une résolution directe ou modale. Dans le cas d'un traitement par la méthode d'analyse modale il suffit de prendre pour second membre le terme  $\mathbf{F} - \mathbf{C}\mathbf{p}_i$  ( $i$  est le numéros de l'itération en cours) et de procéder comme dans le paragraphe 4.5 du chapitre 4 (équations 4.31, 4.36a et 4.39); autrement :

- Obtenir une base modale
- Calculer la pression du fluide sur le maillage structural
- Obtenir les forces sur les nœuds de la sturcture
- Obtenir les amplitudes  $\tilde{\mathbf{v}}$  puis les déplacements des nœuds structure  $\mathbf{u}$
- Obtenir les déplacements des nœuds fluides.

## CHAPITRE 6

### RÉSOLUTION NUMÉRIQUE DES ÉQUATIONS DE COUPLAGE RIGIDE ET ELASTIQUE

#### 6.1 Techniques de résolution des équations fluides

##### 6.1.1 Méthode de résolution

La méthode directe de résolution des équations algébriques résultantes aussi bien de la diffraction d'un corps rigide que du rayonnement d'une structure élastique peut être utilisée, mais ce serait cher en termes de stockage et en temps de factorisation. Les méthodes itératives, en particulier les méthodes de gradient, sont bien adaptées aux matrices creuses. La méthode du gradient conjugué classique n'est pas utilisable directement car la matrice n'est pas symétrique définie positive. La méthode de résolution GMRES (Generalized Minimum Residual Method), est une méthode de projection dans l'espace de Krylov, qui s'avère robuste pour la résolution de systèmes d'équations indéfinis tel que le système d'équations ( du type 2.63, 3.8, 4.29 et 5.27) notamment lorsque le nombre d'onde  $k$  est très élevé. L'idée de base de cette technique [31] est de minimiser la norme du résidu normalisé sur tout l'espace vectoriel de Krylov. L'algorithme de base s'énonce ainsi :

On cherche à résoudre :  $\mathbf{A}\mathbf{u}=\mathbf{F}$

1. Calculer le résidu  $\mathbf{r}_0 = \mathbf{F} - \mathbf{A}\mathbf{u}_0$ ,  $\beta = \|\mathbf{r}_0\|_2$ , et  $\mathbf{r}_1 = \frac{\mathbf{r}_0}{\beta}$

2. Définir la matrice  $\tilde{\mathbf{H}}_m = \{\mathbf{h}_{ij}\}$  de dimension  $(m+1) \times m$ .

Initialiser cette matrice à zéro.

3. Pour  $j = 1, 2, \dots, m$ ,

a. Calculer  $\mathbf{w}_j = \mathbf{A}\mathbf{v}_j$

a1. Pour  $i = 1, 2, \dots, j$ ,

- a11.  $h_{ij} := (w_j, v_i)$
- a12.  $h_{ij} = w_j - h_{ij} v_i$
- b1. Fin de la 2<sup>ème</sup> boucle
- b. Calculer  $h_{j+1,j} = \|w_j\|^2$ . Si  $h_{j+1,j} = 0$  poser  $m := j$  et aller à 5
- c.  $v_{j+1} = \frac{w_j}{h_{j+1,j}}$
- 4. Fin de la 1<sup>ème</sup> boucle
- 5. Calculer  $y_m$  le minimum de  $\|\beta e_1 - \tilde{H}_m y\|_2$  et  $u_m = u_0 + v_m y_m$ .

L'efficacité et la robustesse de GMRES peuvent être exploitées et même améliorées en utilisant un préconditionnement judicieux. Ce dernier est un moyen de transformer le système initial en un autre qui a la même solution, mais qui est mieux conditionné et donc plus facile à résoudre avec GMRES. Le préconditionnement de GMRES est basé sur la résolution du système d'équations suivant :

$$\begin{cases} A M^{-1} x = F \\ x = M u \end{cases} \quad (6.1)$$

Son algorithme s'énonce ainsi :

- 1. Calculer le résidu  $r_0 = F - A U_0$ ,  $\beta = \|r_0\|_2$  et  $v_1 := \frac{r_0}{\beta}$
- 2. Pour  $j = 1, 2, \dots, m$ 
  - a. Calculer  $w = M^{-1} A v_j$
  - b. Pour  $i = 1, 2, \dots, j$ ,
    - b1.  $h_{ij} := (w, v_i)$
    - b2.  $h_{ij} = w - h_{ij} v_i$
  - c. Fin de la 2<sup>ème</sup> boucle



3. Calculer  $h_{j+1,j} = \|w\|^2$  et  $v_{j+1} = \frac{w}{h_{j+1,j}}$
4. Définir  $V_m = [v_1, \dots, v_m]$ ,  $\tilde{H}_m = \{h_{ij}\}$
5. Fin de la 1<sup>ère</sup> boucle
6. Calculer  $y_m$  le minimum de  $\|\beta e_1 - \tilde{H}_m y\|_2$  et  $u_m = u_0 + V_m y_m$ .

La matrice de préconditionnement  $M$  est issue d'une factorisation incomplète du type LU de la matrice  $A$ . Une factorisation ILU calcule une matrice triangulaire inférieure  $L$  et une matrice triangulaire supérieure  $U$  de telle manière que la matrice résidu  $R = LU - A$  satisfait certaines contraintes, comme par exemple avoir des composantes nulles dans certains emplacements. Nous considérons, en premier lieu, la factorisation ILU0, la forme la plus simple des préconditionneurs ILU. Par la suite, le préconditionneur ILUT [32], plus sophistiquée est présentée.

La technique de factorisation incomplète avec un remplissage nul, désigné par ILU0, consiste à décomposer la matrice  $A$  en des matrices  $L$  et  $U$  respectivement inférieure et supérieure telles que celles-ci aient exactement la même structure bande respectivement des parties inférieure et supérieure de la matrice  $A$ . Cet algorithme se compose des étapes suivantes:

1. Pour  $i=1, \dots, n$ 
  - a1. Pour  $k=1, \dots, i-1$  et  $\forall (i, k)$  tel que  $a_{ik} \neq 0$ 
    - a11. Calculer  $a_{ik} = \frac{a_{ik}}{a_{kk}}$
    - a12. Pour  $j=k+1, \dots, n$  et  $\forall (i, j)$  tel que  $a_{ij}$
    - a13. Calculer  $a_{ij} := a_{ij} - a_{ik} a_{kj}$
  - a2. Fin de boucle
2. Fin de boucle

La technique ILU0 est qualifiée d' « aveugle ». En effet, elle ne tient pas compte des valeurs numériques des éléments de la matrice  $A$ . Elle dépend uniquement de sa topologie. C'est une des raisons de l'inefficacité de cette technique dans certaines applications. Une alternative est d'éliminer certaines composantes, lors du processus de factorisation de Gauss, en tenant compte des amplitudes de celles-ci. Ainsi, la structure bande est déterminée de façon dynamique.

L'algorithme générique ILU avec seuil (ILUT, ILU with threshold) dérive de l'algorithme de Gauss en introduisant des règles d'élimination des éléments de faible amplitude. Ces règles peuvent bien entendu s'appliquer à des éléments formant la même ligne.

1. Pour  $i=1, \dots, n$

a.  $w = a_i$ ,  $a_i$  désigne la ligne  $i$  de la matrice  $A$

b. Pour  $k=1, \dots, i-1$  et quand  $w_k \neq 0$

$$b1. \quad w_k := \frac{w_k}{a_{kk}}$$

b2. Appliquer une règle d'élimination à  $w_k$

b3. Si  $w_k \neq 0$  alors

$$b31. \quad w := w - w_k u_k, \quad u_k \text{ désigne la } k^{\text{ième}} \text{ ligne de } U$$

b4. Fin Si

c. Fin de boucle

2. Appliquer une règle d'élimination à la ligne  $w$

3.  $l_{ij} = w_j$  pour  $j=1, \dots, i-1$

4.  $u_{ij} = w_j$  pour  $j=1, \dots, n$

5.  $w := 0$

6. Fin de boucle

ILU0 peut être vu comme un cas particulier de l'algorithme ci-dessus où l'on élimine les éléments qui occupent des positions en dehors de la topologie de la matrice A. Dans le processus de factorisation ILUT (lfil, tol), les règles ci-dessus sont appliquées.

1. Dans la ligne b2, un élément  $w_k$  est éliminé (remplacé par un zéro) si son amplitude, relativement à la norme 2 du vecteur ligne, est inférieure à une tolérance tol.
2. Dans la ligne 2, la règle adoptée est différente. En premier, éliminer n'importe quel élément ayant une amplitude relative inférieure à la tolérance. Ensuite, sauvegarder uniquement les lfil plus grands éléments dans la partie L de la ligne et les lfil plus grands éléments dans la partie U de la ligne en plus des termes diagonaux qui sont toujours sauvegardés. Cette deuxième règle aide ainsi à contrôler le nombre d'éléments par ligne.

Les paramètres lfil et tol permettent respectivement le control de l'espace mémoire utilisé et la réduction du coût des opérations.

### 6.1.2 Calcul analytique du paramètre $\hat{\tau}$

Dans le cas des ondes planes se propageant dans une direction  $\theta$  donnée, le paramètre  $\hat{\tau}$ , déterminé analytiquement par Harari et al. [26, 30], permet d'éliminer l'erreur de dispersion due à la différence entre les nombres d'onde des systèmes discret et continu. Pour un maillage régulier, formé d'éléments finis bilinéaires et de pas h constant, le paramètre  $\hat{\tau}$  a pour expression :

$$\hat{\tau} = \frac{1}{k^2} \left( 1 - \frac{6(4 - f_x - f_y - 2f_x f_y)}{(kh)^2 (2 + f_x)(2 + f_y)} \right) \quad (6.4)$$

$$\begin{aligned} \text{avec :} \quad f_x &= \cos(kh \cos(\theta)) \\ f_y &= \cos(kh \sin(\theta)) \end{aligned} \quad (6.5)$$

Les valeurs de  $\hat{\tau}$ , fréquemment utilisées en pratique, correspondent à  $\theta=0^\circ$  et  $\theta=22.5^\circ$  [30].

### 6.1.3 Méthode proposée de calcul du paramètre $\hat{\tau}$

Pour des maillages non réguliers, Kechroud et al. proposent [36] comme alternative, un calcul numérique du coefficient  $\hat{\tau}$  au niveau de chaque élément fini. L'idée de base a pour point de départ le système d'équations élémentaire issu de la discrétisation de la forme variationnelle (6.3), soit :

$$[K]_e \{u\}_e - \hat{\tau} k^2 [M]_e \{u\}_e = \{0\} \quad (6.6)$$

où  $[K]_e$  et  $[M]_e$  désignent respectivement les matrices rigidité et masse élémentaires.

Les deux membres de la relation (6.6) sont multipliés par le vecteur ligne conjugué  $\{u\}_e^{*T}$ . L'expression du paramètre  $\hat{\tau}$  est déduite de la relation ainsi obtenue :

$$\hat{\tau} = \frac{\{u\}_e^{*T} [K]_e \{u\}_e}{k^2 \{u\}_e^{*T} [M]_e \{u\}_e} \quad (6.7)$$

avec  $\{u\}_e = \left\{ e^{j(k \cos(\theta) x_i + k \sin(\theta) y_i)} \right\}$  et  $(x_i, y_i)_{i=1, \dots, NNE}$  sont les coordonnées des nœuds formant l'élément fini considéré (NNE : est le nombre de nœud par élément).

Pour des maillages réguliers, les valeurs du coefficient  $\hat{\tau}$  obtenues à partir des expressions (6.4) et (6.7), sont identiques. De par sa simplicité, cette approche peut être généralisée au cas tridimensionnel et aux éléments finis isoparamétriques linéaires.

## 6.2 Quelques aspects d'implémentation

### 6.2.1 Résolution des équations de la structure

La méthode de résolution des équations résultats du mouvement de la structure dans le cas d'une interaction élastoacoustique est celle d'analyse modale dont l'algorithme est dénommé CSD (pour computational structural dynamics) et qui est décrit au paragraphe 4.5 du chapitre 4. Avant d'appliquer le code CSD, nous traitons dans un premier temps la structure en question par le logiciel ANSYS. Ce dernier nous fournit les coordonnées, les connectivités, mais surtout les valeurs propres et les vecteurs propres (obtenir les matrices  $\mathbf{P}$  et  $\lambda$ ) qui permettent de calculer le champ de déplacement de la structure.

### 6.2.2 Résolution des équations de couplage

Le couplage entre le fluide et le mouvement de structure élastique est illustré l'algorithme.

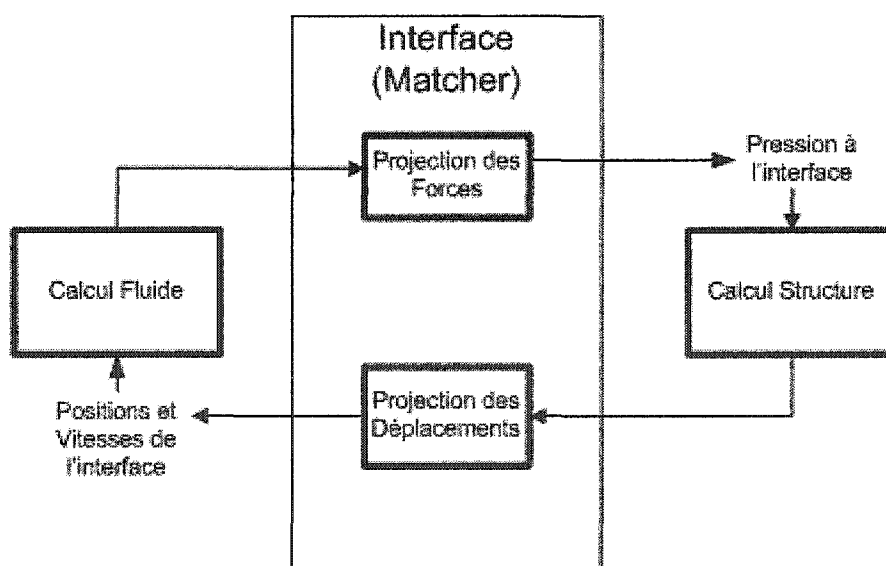


Figure 13 Algorithme séquentiel : interaction fluide-structure

L'algorithme séquentiel est basé sur une alternance entre l'algorithme qui résout le champ de pression fluide (Code Helmholtz) et l'algorithme qui résout le champ de

déplacement de la structure (CSD). L'intermédiaire entre ces deux algorithmes est constitué d'une interface appelée « matcher » [36]. L'interface assure les fonctions suivantes :

- Projeter les pressions calculées par le fluide sur les nœuds de la structure.
- Mettre à jour les conditions aux limites du fluide en tenant compte des vitesses de déplacement de la structure.

Nous rappelons, que lorsqu'il s'agit de traiter des cas où le déplacement de la structure est important, on adopte un maillage dynamique pour le fluide (i.e. on adopte une description cinématique arbitraire Eulerienne-Lagrangienne ALE [37]). Dans ce cas seulement on fait appel à un troisième module qui calcule le mouvement du maillage fluide «Mesher» à partir des déplacements de la structure. Pour le cas présent de ce mémoire, nous avons uniquement affaire à des petits déplacements de la structure. Le module «Mesher» n'est donc pas indispensable.

Un premier algorithme itératif de résolution du couplage fluide-structure peut être décrit par les étapes suivantes.

### 6.2.3 Exploitation du Matcher

Le fonctionnement du code matcher, qui a été mis au point par mon collègue Z. Feng dans le cadre de sa thèse de Doctorat, dans le cas de l'élastoacoustique est décrit par l'organigramme de la page suivante. Les déplacements obtenus au niveau de la routine *Displace* du dit organigramme sont multipliés par  $\rho_f \omega_f^2$  comme dans la première condition d'interface :

$$\rho_f \omega_f^2 \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} - \frac{\partial p}{\partial n} = \frac{\partial p_{inc}}{\partial n} \Leftrightarrow \frac{\partial p}{\partial n} = \rho_f \omega_f^2 \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} - \frac{\partial p_{inc}}{\partial n} \quad (6.8)$$

qui donne après discrétisation par éléments finis :

$$\int_A \phi \frac{\partial p}{\partial n} dA \stackrel{\substack{\phi \text{ est la fonction test} \\ \phi = N_i}}{=} \int_A N_i \sum_{j=1}^{n_r} N_j \left( \frac{\partial p}{\partial n} \right)_j dA = \sum_{j=1}^{n_r} \left( \int_A N_i N_j dA \right) \left( \frac{\partial p}{\partial n} \right)_j = [M]_A \left\{ \frac{\partial p}{\partial n} \right\}$$

L'équation (6.8) représente une condition de type Neumann. Cette intégrale est traitée par une routine qui la traduit via sa matrice de masse en vecteur second membre (terme de contour) et le communique ensuite au code Helmholtz. En d'autres termes, si nous connaissons la valeur de la dérivée de la pression rayonnée et/ou diffractée, nous pouvons calculer la pression rayonnée et/ou diffractée dans tout le domaine via le code de Helmholtz 3D.

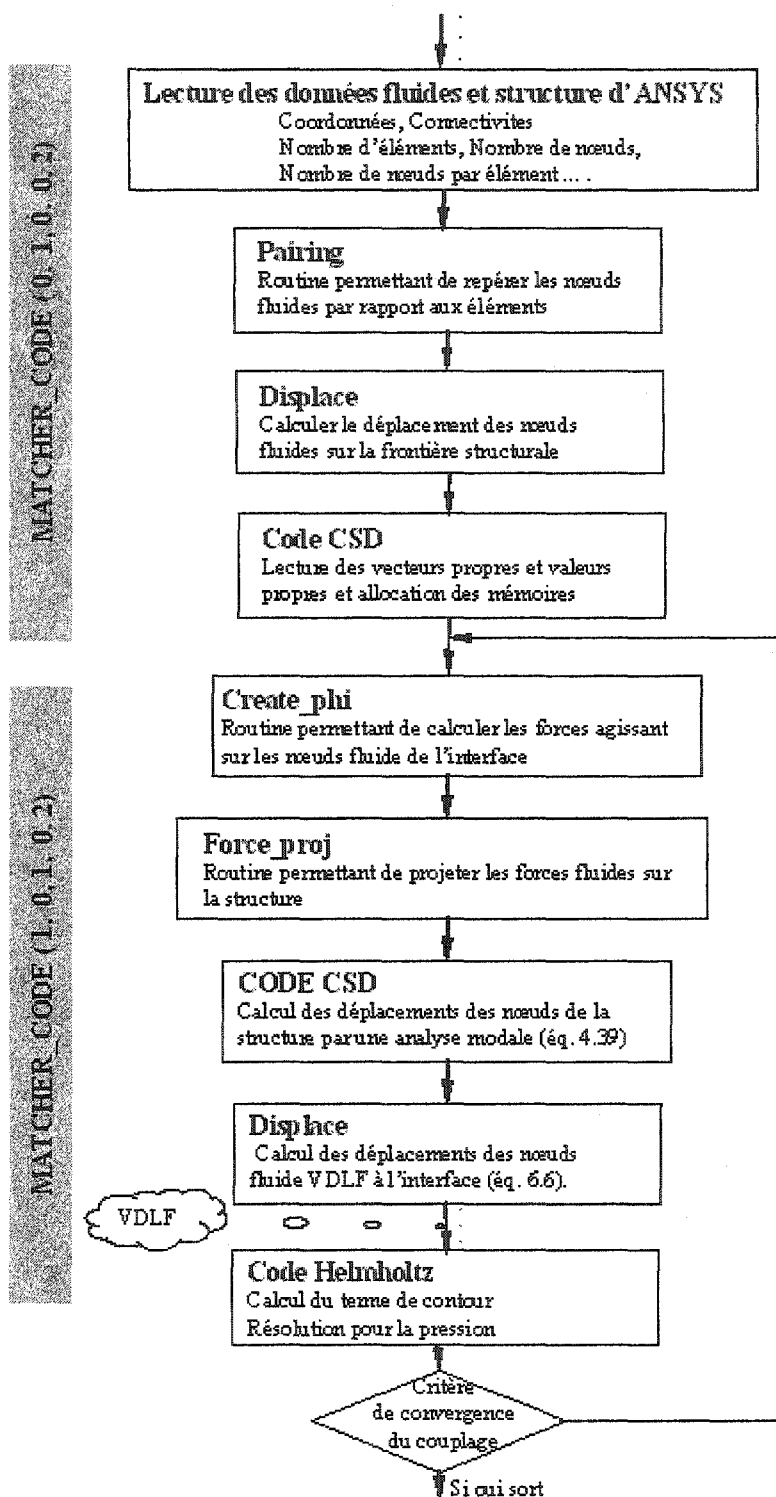


Figure 14 Exploitation du code matcher



## CHAPITRE 7

### TESTS NUMÉRIQUES I VALIDATION DU CODE HELMHOLTZ 3D

Un nombre considérable de sources sonores peuvent être analysées comme si elles étaient des sources planes situées au ras d'un plan rigide. Ces sources représentent le model de nombreux cas pratiques tels que les haut-parleurs, les conduites à ventilations, ...etc. Les sources peuvent être analysées par la formule de Rayleigh comme une distribution de sources simples de débit  $dQ(\mathbf{r}_s) = \ddot{w}(\mathbf{r}_s) dS_s$  situées au ras du plan rigide. Autrement dit, nous pouvons construire la solution analytique de ces sources pour le champ lointain. Ceci peut représenter un test de validation pour le code Helmholtz, qui jusqu'à présent n'était testé que pour la diffraction d'onde sur un corps rigide [36].

Dans cette partie, nous allons tenter de simuler plusieurs cas d'exemples connus par les acousticiens à savoir le piston circulaire et rectangulaire vibrant uniformément. En outre, nous traiterons le cas de la sphère pulsante, qui représente l'élément essentiel dans la synthèse des champs acoustiques rayonnés par les sources linéaires et planes.

Avant tout, nous allons passer en revue ces différentes sources sonores et donner l'expression de la pression au champ lointain pour les deux premiers exemples et celui du champ rayonné pour le cas de la sphère (voir annexe VI).

#### 7.1 Champ lointain des sources circulaires et rectangulaires

Nous rappelons que le problème général de rayonnement est régi par l'équation de Helmholtz, la condition de continuité à l'interface fluide-structure et celle de la condition de rayonnement à l'infini.

Ces équations particularisées à une géométrie plane bafflée s'écrivent comme suit :

$$\begin{aligned}
& \cdot (\nabla^2 + k^2) p = 0 \quad z \geq 0 \\
& \cdot \frac{\partial p}{\partial n} = \begin{cases} \rho \omega^2 w(x, y) & \text{sur } S_{\text{structure}} \\ 0 & \text{Ailleurs} \end{cases} \\
& \cdot \text{Condition de Sommerfeld}
\end{aligned} \tag{7.1}$$

Pour les deux premières applications nous nous intéressons essentiellement au calcul du champ lointain. Dès lors, l'utilisation de la formule de Rayleigh pour le calcul de ce champ lointain est justifiée (voir annexe IV). La contribution des sources simples doit être multipliée par deux pour simuler le plan de symétrie. Elle est donnée par l'expression (7.2) :

$$p(\mathbf{r}) = \frac{\rho}{2\pi r} \int_{S_s} e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}_s|} \ddot{w}(\mathbf{r}_s) dS(\mathbf{r}_s) \tag{7.2}$$

avec  $w$  et  $\ddot{w}$  sont le déplacement transversal et l'accélération de la source.

## 7.2 Test I.1 : Champs lointain du piston circulaire bafflé

Nous essayons dans cette partie de valider le code mis au point en comparant la solution numérique à la solution analytique (dédue de la formule de Rayleigh) du champ lointain d'un piston circulaire bafflé (figure 14). Dans un premier temps, nous analyserons, pour un emplacement donné de la frontière artificielle, l'influence de la résolution du maillage sur la solution numérique. Nous étudierons ensuite, pour un même maillage, l'influence de l'emplacement de la frontière artificielle sur la solution numérique pour différents régimes de fréquences.

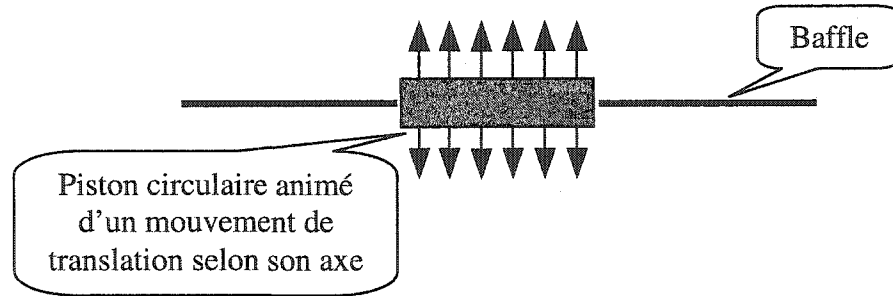


Figure 15 Piston circulaire bafflé

Nous fixons les cas tests suivants :

- Le piston circulaire est de rayon  $r_o = 0.1$  m et de hauteur  $h = 0.01$  m
- La frontière artificielle est placée à 0.9, 0.7, 0.5, 0.4, 0.3, 0.2 et 0.1 m du piston
- L'expression analytique du champ de pression lointain est donnée par :

$$p(r, \theta) = \frac{\rho r_a \ddot{W} e^{ikr} J_1(k r_a \sin \theta)}{k r \sin \theta} \quad \text{avec } r_a \ll r \text{ et } k r_a^2 \ll r \quad (7.3a)$$

- La condition de Neumann est :

$$\frac{dp}{dr} = -\rho \omega^2 w_o \quad (7.3b)$$

avec  $w_o$  l'amplitude des translations oscillatoires du piston circulaire.

- L'expression du champ de pression sur l'axe du piston est :

$$|p(0, z)| = \rho c \ddot{W} \frac{k r_o^2}{2z} \quad z \gg r_a \text{ et } k r_a^2 \ll z \quad (7.3c)$$

La frontière artificielle et le piston circulaire «PC» se présentent comme indiqué sur la figure 15. La frontière artificielle est une demie sphère où les conditions aux limites absorbantes de Bayliss-Gunburger-Turkel du second ordre sont appliquées. L'intersection du plan xy avec la frontière artificielle donne le baffle sur lequel nous imposons une vitesse normale nulle. Nous avons utilisé le logiciel GID pour générer les maillages. Les éléments des maillages du domaine fluide sont des tétraèdres linéaires. L'amplitude  $w_o$  des oscillations est prise égale à l'unité et  $\ddot{W} = i\omega \dot{W} = -\omega^2 w_o$ .

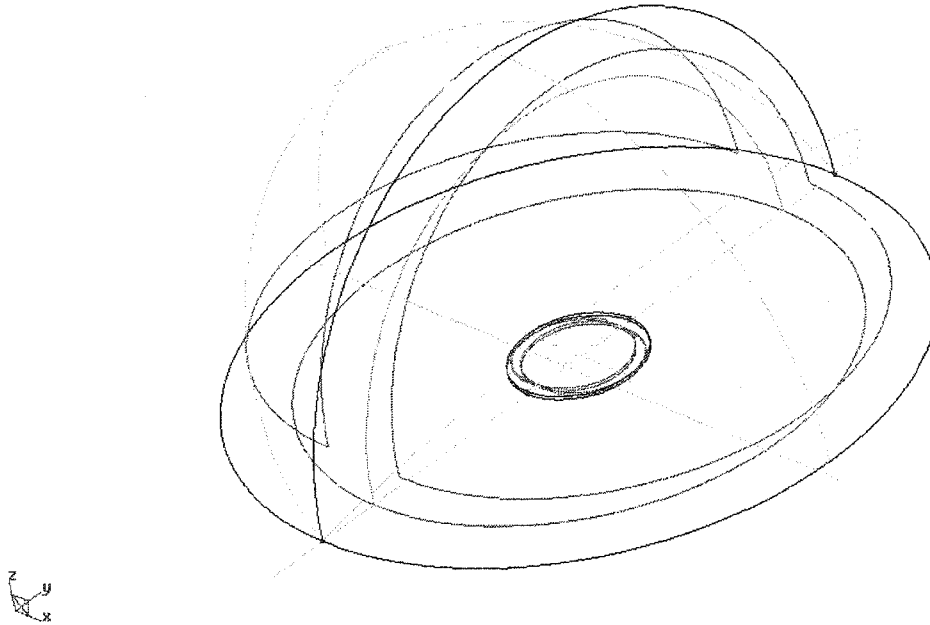


Figure 16 Présentation géométrique du piston circulaire et de la FA par GID

### 7.2.1 Validation et étude de l'influence de la discrétisation

Les données du solveur et du préconditionneur de tous nos tests de cette partie sont regroupées dans le tableau I :

Tableau I  
Données concernant le solveur et le préconditionneur

Grandeur	Valeur
lfil	nnz / n
Tol du préconditionneur ILUT	$10^{-5}$
Dimension de l'espace de krylov	im = 50
Facteur de décroissance du résidu	$10^{-8}$

Nous avons construit cinq maillages correspondant à une même frontière artificielle de rayon  $R_{FA} = 1$ . Les dit cinq discrétisations ont les caractéristiques suivantes :

Tableau II  
Caractéristiques des tests de discrétisation du PC pour  $R_{FA} = 1$

Test	Nombre de nœuds fluides total NNT	Nombre d'éléments fluides total NELT	Nombre de nœuds fluides d'interface NNI	Nombre d'éléments fluides d'interface NELI	Nombre de nœuds sur la frontière artificielle NNFA	Côte de l'arrête d'un élément a
1	399 326	1 987 903	4 415	8 428	85 451	0.02330
2	57 592	282 881	311	566	13 641	0.04462
3	17 450	84 008	280	516	3 402	0.06688
4	10 558	48 952	287	526	1 517	0.08007
5	8 793	40 499	287	526	850	0.08530

Pour le même emplacement et pour la même résolution du maillage, la précision des résultats obtenus (Tableau III) en utilisant un schéma du type GLS est supérieure à celle obtenue avec le schéma de Galerkin classique. Dans les deux cas, le nombre d'itérations et le temps de résolution et de factorisation sont pratiquement identiques. Même pour une faible résolution (test 5), le schéma de GLS conduit à une bonne précision. Ceci nous amène à adopter dans la suite de nos essais le schéma GLS.

Tableau III  
Erreur  $L_2$  sur  $\|p\|$  du PC pour un même emplacement

Fréquence en Hz		100	200	300	400	500	600	700	800
Test 1	$L_2$ sur $\ p\ $ Schéma G.	0.4161	1.1795	3.8807	7.6033	12.2586	19.5955	31.5726	44.4660
	$L_2$ sur $\ p\ $ Schéma GLS.	0.4502	1.3375	2.7909	3.7793	5.7811	7.2726	10.2574	13.7501
Test 5	$L_2$ sur $\ p\ $ Schéma G.	1.8995	4.0845	12.2861	19.5422	34.8270	53.3754	80.0321	98.4167
	$L_2$ sur $\ p\ $ Schéma GLS.	2.5911	3.2168	7.0756	9.3536	15.4276	19.4313	26.8215	32.8367

Le tracé pour les différents tests de l'erreur  $L_2$  sur le module de la pression en fonction de la fréquence pour le schéma GLS est illustré par la figure 16. Nous distinguons nettement l'effet de la résolution sur la solution numérique. Plus la résolution est fine plus l'erreur  $L_2$  sur le module de la pression est petite et plus la résolution est grossière plus la solution est moins précise.

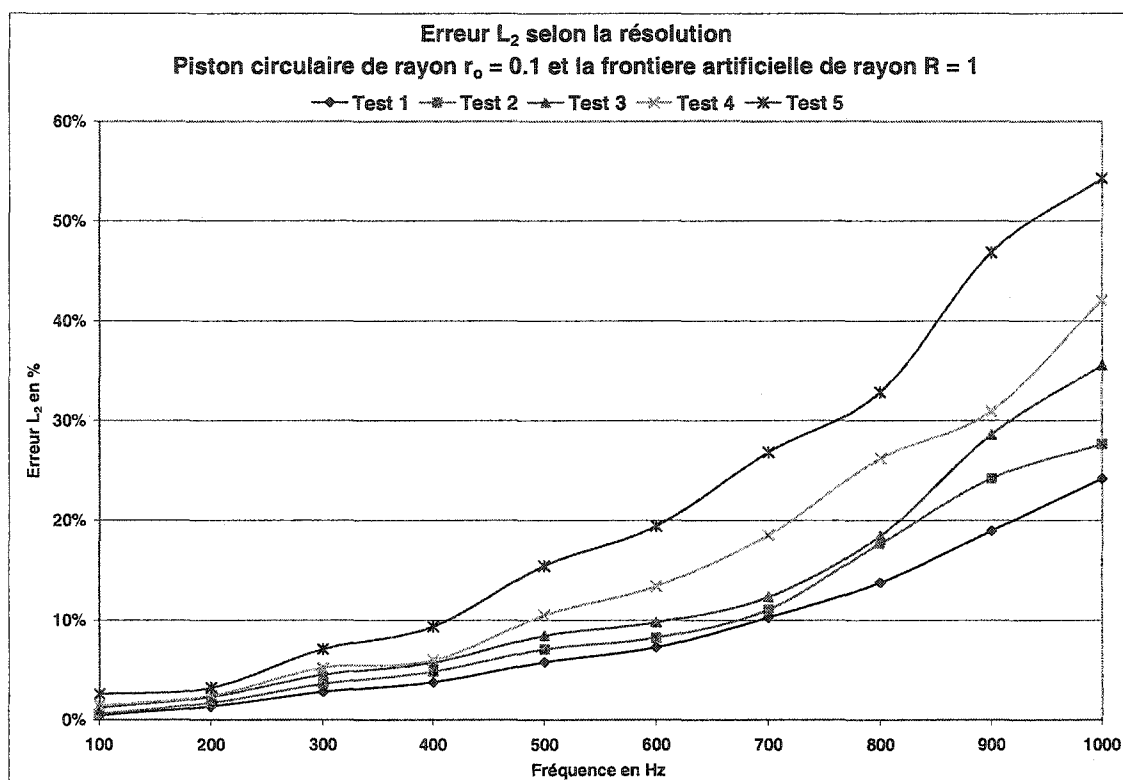


Figure 17 Erreur  $L_2$  du PC en fonction de la fréquence ( $r_0=0.1$  et  $R_{FA}=1$ )

Essayons de voir maintenant l'effet de la résolution sur l'erreur  $L_2$  du module de la pression pour une fréquence donnée. Le tableau IV regroupe les résultats montrant cette influence :

Tableau IV

Erreur L2 sur  $\| p \|$  du PC avec le schéma GLS

Fréquence en Hz	Erreur Relative L <sub>2</sub> sur le module de la pression en %				
	Test 1	Test 2	Test 3	Test 4	Test 5
100	0.45021	0.57536	1.17208	1.37673	2.59105
200	1.33747	1.69774	2.31867	2.41955	3.21675
300	2.79090	3.58708	4.50869	5.20957	7.07556
400	3.77934	4.84456	5.74241	5.96407	9.35356
500	5.78108	7.07829	8.43338	10.48174	15.42759
600	7.27259	8.24828	9.77997	13.37033	19.43127
700	10.25742	11.05841	12.30192	18.52034	26.82153
800	13.75015	17.67314	18.44478	26.20307	32.83672
900	18.95063	24.19879	28.58097	30.91139	46.82932
1000	24.17933	27.64637	35.53368	42.07011	54.25208

Pour le même emplacement (le cas étudié est celui d'un rayon de la frontière artificielle valant dix fois la dimension principale de l'objet rayonnant), la précision des résultats obtenus (en utilisant un schéma du type GLS) diminue avec la résolution du maillage. D'autre part, plus la fréquence augmente plus la précision est moins bonne; chose qui peut être corrigée en sachant que la précision des résultats dépend aussi de l'emplacement de la frontière artificielle (voir plus loin).

La figure 17 nous renseigne d'avantage, pour des fréquences données, sur le comportement de la solution vis-à-vis de l'emplacement.

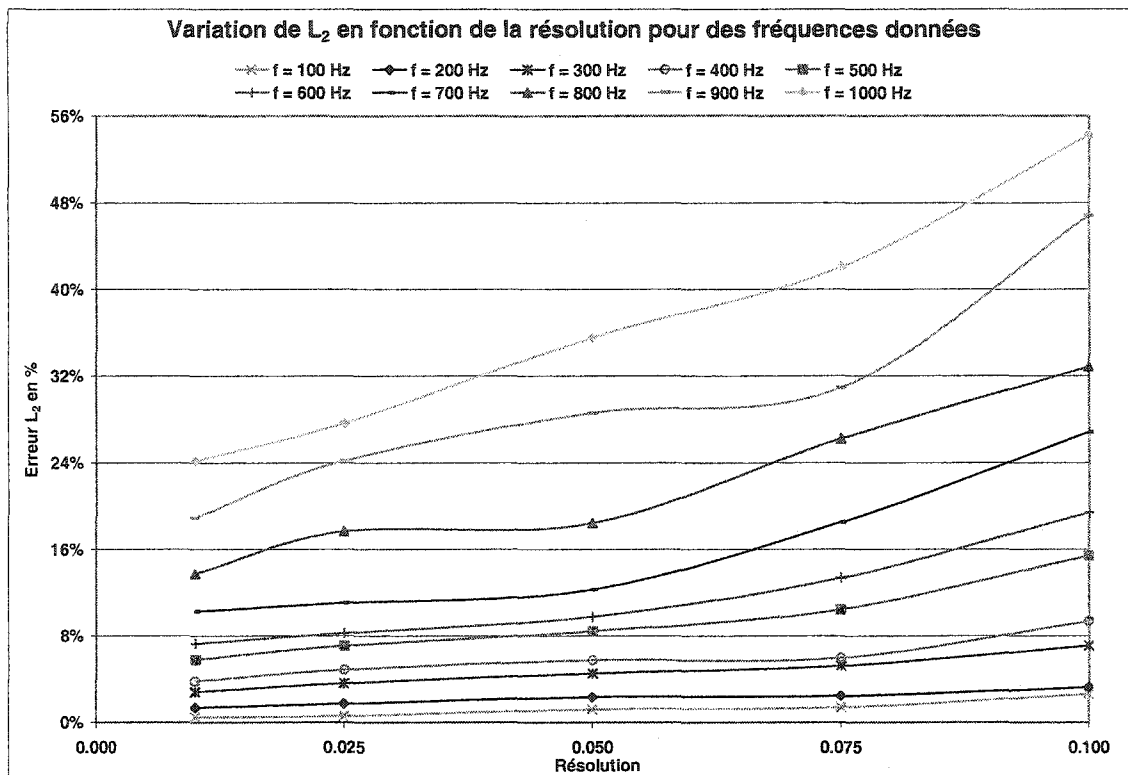


Figure 18 Variation de  $L_2$  du PC en fonction de la résolution

### 7.2.2 L'influence de l'emplacement de la frontière artificielle

Afin d'étudier l'effet de l'emplacement de la frontière artificielle (FA), nous nous sommes donné sept positions de cette dernière. Et en vue de pouvoir comparer les résultats qui en découlent, nous nous sommes fixé pour tous nos maillages une même valeur moyenne de l'arrête de l'élément tétraédrique. Sa valeur est prise à peu près égale à 0.0233. Les sept discrétisations ont les caractéristiques suivantes :



Tableau V

Caractéristiques des maillages du PC pour la même "résolution"

Test	$R_{FA}$	NNT	NELT	NNI	NELI	NNFA
1	1	399 326	1 987 903	4 415	8 428	85 451
2	0.8	205 588	1 023 471	403	730	47 734
3	0.6	87 241	429 147	374	674	21 285
4	0.5	50 829	248 280	360	648	12 729
5	0.4	26 281	127 228	348	626	6 705
6	0.3	11 326	53 620	333	600	2 935
7	0.2	3 567	15 832	321	582	828

En changeant l'emplacement de la FA pour la même "résolution du maillage", nous obtenons les résultats formulés dans la tableau V.

Tableau VI

Erreur  $L_2$  sur  $\|p\|$  du PC avec GLS pour une même résolution

$L_2$ sur $\ p\ $	Fréquence en Hz									
	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1 000
Test 1	0.4502	1.3375	2.7909	3.7793	5.7811	7.2726	10.2574	13.7501	18.9506	24.1793
Test 2	0.5968	0.8852	2.5129	4.0126	5.2267	7.2867	8.2281	9.6158	11.2113	13.7321
Test 3	0.8296	1.1156	1.5486	3.1162	4.6432	5.5668	6.8939	8.8961	9.6803	10.3593
Test 4	1.0264	1.4120	1.6742	2.6106	4.4686	6.3334	7.5690	8.1681	9.3344	10.6177
Test 5	1.4360	1.9204	2.3816	2.7600	3.6007	5.1804	7.0378	8.7875	10.0617	11.1277
Test 6	2.2767	2.7940	3.4764	4.1340	4.6882	5.2866	6.2122	7.5922	9.3967	11.5852
Test 7	4.8207	5.3570	6.1826	7.2109	8.3420	9.4725	10.5040	11.3550	11.9804	12.4032

Pour la plage de fréquence de 100 à 1 000, nous constatons :

- pour les hautes fréquences, le test 1 fournit une mauvaise précision de la solution. Il sera écarté pour la suite de cette analyse.

- le test 7 fournit lui aussi des précisions médiocres pour les basses fréquences. Il sera aussi éliminé pour la suite de cette analyse.
- plus la fréquence est élevée plus la frontière artificielle est à rapprocher de l'objet rayonnant (voir aussi figure 18). Néanmoins, nous ne pouvons pas rapprocher beaucoup cette frontière du piston circulaire sinon nous risquons de compromettre notre raisonnement puisque la comparaison de la solution numérique se fait par rapport à celle d'un champ lointain.
- les tests 2, 3, 4 et 5 présentent un bon compromis; la précision est beaucoup grande que pour les autres tests.

Ces deux dernières constatations nous révèlent l'existence d'un emplacement optimal pour lequel la précision, dans la plage sus indiquée, est meilleure.

Pour pouvoir trancher sur l'emplacement optimal, il est indispensable d'étaler cette plage. Nous préférons, pour le moment fournir un graphe qui nous renseigne sur le comportement de la solution en fonction de l'emplacement.

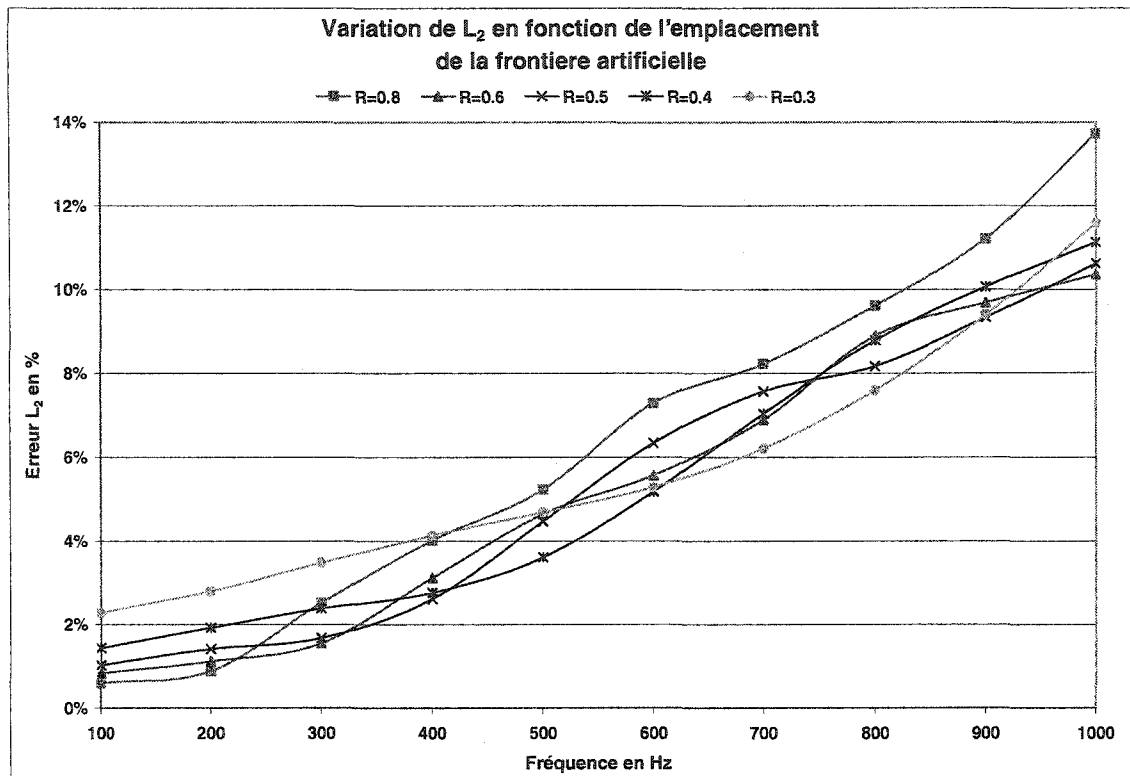


Figure 19 Variation de  $L_2$  du PC en fonction de la fréquence.

La figure 18 laisse voir aussi un écartement pour les hautes fréquences de la solution fournie par le test 2. Le test 6 présente aussi une faiblesse de la solution pour les basses fréquences. Nous ne retenons en fin de compte que les tests 4 et 5.

Nous pouvons voir les résultats du tableau VI d'un autre axe. Nous fixons la fréquence et nous faisons varier l'emplacement. Le tracé figure 19 présente le fruit de cette suggestion. Nous distinguons que :

- plus la fréquence est élevée plus la frontière artificielle est à rapprocher
- plus la fréquence est basse plus la frontière artificielle peut être éloignée
- Un bon compromis est celui donné pour un emplacement dont le rayon est compris entre  $R = 0.4$  et  $0.6$  et qui représente un rapport moyen de cinq fois celui du piston circulaire.

Nous présentons ci-après quelques résultats, se rapportant à l'emplacement  $R_{FA} = 0.5$ , qui ont une importance capitale en acoustique. Il s'agit des résultats concernant le niveau de puissance acoustique, le facteur de puissance (voir équations 8.4 à 8.7), l'évolution de l'erreur  $L_2$  sur le module de la pression et celle du CPU en fonction du nombre adimensionnel  $\lambda/r_0$ .

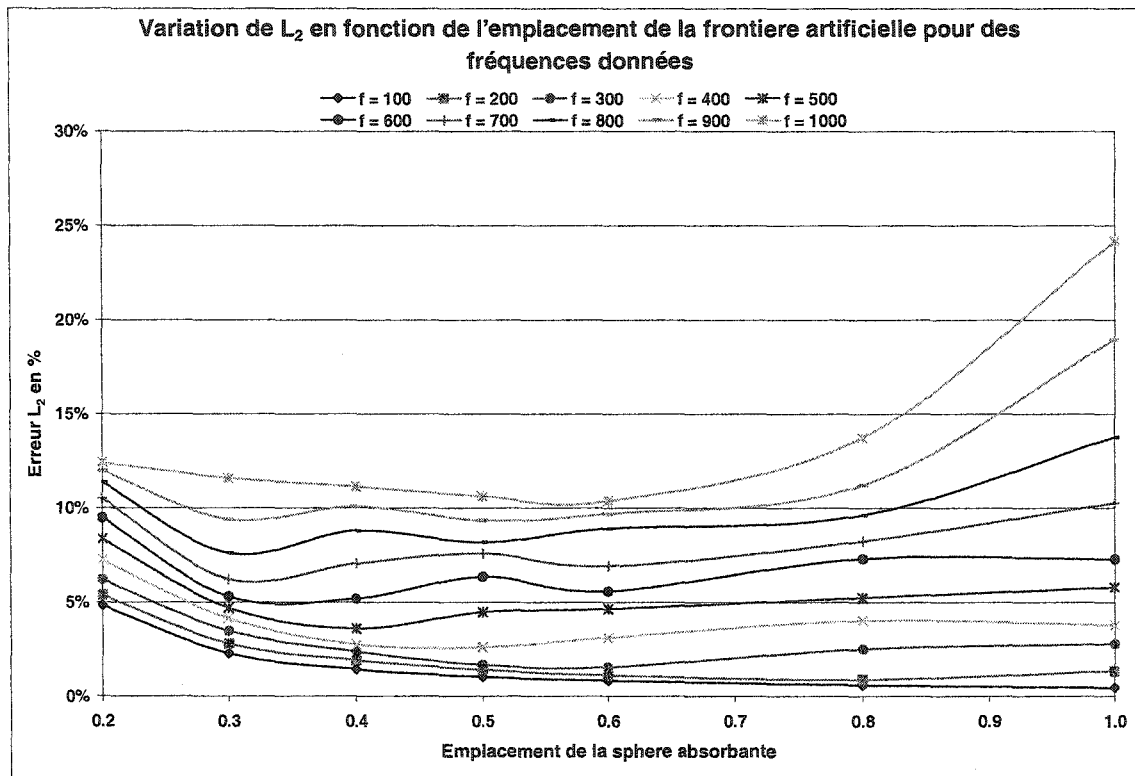


Figure 20 Variation de  $L_2$  du PC en fonction de l'emplacement de la FA

Les caractéristiques du maillage, sur la base duquel nous allons tirer les résultats susmentionnés (voir tableau VIII), sont données par le tableau VII :

Tableau VII

Caractéristiques du test du PC pour la FA optimal  $R_{FA} = 0.5$ 

$R_{FA}$	NNT	NELT	NNI	NELI	NNFA	a
0.5	128 720	620 149	7 312	14 022	21 188	0.0172

Tableau VIII

Résultats du test du PC pour la FA optimal  $R_{FA} = 0.5$ 

Label	$\lambda/r_0$									
	100	80	60	40	20	10	5	4	3.4	2
$L_w$ Anal.	107.68	111.56	116.55	123.58	135.57	147.40	158.59	161.82	163.97	167.00
$L_w$ Numl.	107.68	111.55	116.54	123.57	135.55	147.33	158.30	161.62	163.68	168.85
$\sigma_{ray}$ Anal.	14.934	36.459	115.14	581.55	9190.7	1.399e <sup>5</sup>	1.839e <sup>6</sup>	3.877e <sup>6</sup>	6.357e <sup>6</sup>	2.024e <sup>7</sup>
$\sigma_{ray}$ Num.	14.925	36.415	114.94	579.92	9145.3	1.377e <sup>5</sup>	1.722e <sup>6</sup>	3.706e <sup>6</sup>	5.945e <sup>6</sup>	1.956e <sup>7</sup>
$L_2$ en %	0.783	0.795	0.821	0.894	1.201	1.820	6.585	7.367	9.089	20.460
CPU en s	88.53	88.84	89.45	91.08	94.08	114.25	207.36	256.94	289.34	267.11

Plus  $\lambda/r_0$  est grand plus le niveau de puissance acoustique et la capacité de rayonnement sont petits, plus les résultats sont précis et le CPU est petit.

De plus la différence entre les niveaux de puissance acoustique (respectivement la capacité de rayonnement) analytique et numérique est faible.

Pour une fréquence de 1 700 Hz (i.e.  $\lambda/r_0 = 2$ ) l'erreur est considérable. Le code donne une précision très appréciable pour des fréquences n'excèdent pas 1 500 Hz.

Pour pouvoir étaler cette plage, nous devrions mailler d'avantage le domaine fluide; chose que le logiciel de maillage dont nous disposions ne le permettait pas.

La visualisation des lignes de contour du piston circulaire pour les fréquences 100 et 500 Hz est donnée par la figure 35.

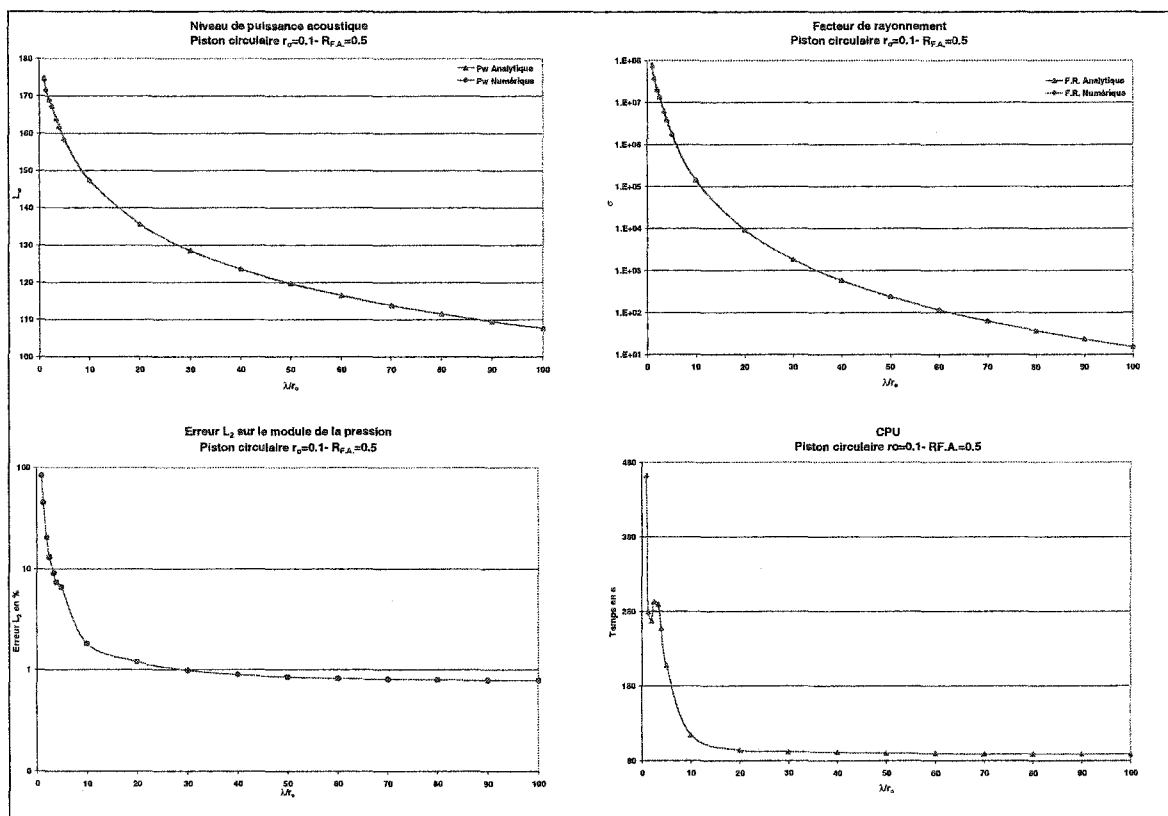


Figure 21 Tracé de  $L_w$ ,  $\sigma$ ,  $L_2$  et CPU en fonction de  $\lambda/r_0$  pour le PC

### 7.3 Test 2 : Champ lointain d'une source rectangulaire bafflée

Comme au paragraphe 7.2 nous tenterons de comparer, pour le champ lointain d'un piston rectangulaire bafflé figure 21, la solution numérique à la solution analytique. Nous étudierons en premier pour un emplacement donné de la frontière artificielle, l'influence de la résolution sur la solution numérique puis nous analyserons, pour une même résolution, l'influence de l'emplacement sur la solution numérique pour différentes fréquences.

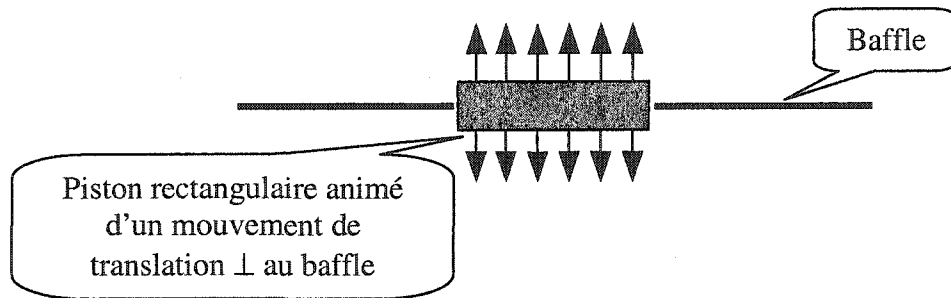


Figure 22 Piston rectangulaire bafflé

Les données et les références de nos tests sont :

- Le piston rectangulaire «PR» a pour longueur  $L=0.1\text{m}$  et largeur  $l=0.1\text{m}$  et pour hauteur  $h = 0.01\text{ m}$
- La frontière artificielle est placée à 0.9, 0.7, 0.5, 0.4, 0.3, 0.2 et 0.1 m du piston
- L'expression analytique du champ de pression lointain est donnée par :

$$p(r, \theta, \varphi) = \frac{2L_x L_y \rho W e^{ikr}}{\pi r} J_0(kL_x \sin \theta \cos \varphi) J_0(kL_y \sin \theta \sin \varphi) \quad (7.4a)$$

- La condition de Neumann pour ce cas est :

$$\frac{dp}{dr} = -\rho \omega^2 w. \quad (7.4b)$$

Dans ce test on s'intéresse à la solution du champ rayonné au-dessus du piston rectangulaire. La frontière artificielle est donc une demie sphère (figure 22). Les

conditions aux limites absorbantes de Bayliss-Gunburger-Turkel du second ordre sont considérées sur la FA. L'intersection du plan  $xy$  avec cette demie sphère donne le baffle sur lequel nous imposons une vitesse normale nulle. Les éléments fluides sont des tétraèdres linéaires. Le domaine fluide est maillé par le logiciel GID. L'amplitude des oscillations  $w_0$  est prise égale à l'unité.

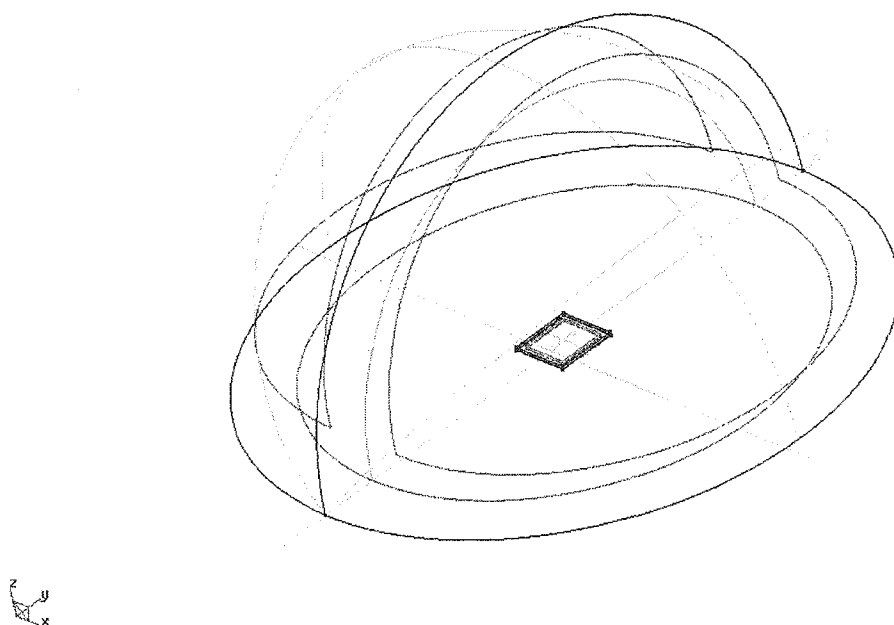


Figure 23 Présentation géométrique du PR et de la FA par GID

### 7.3.1 Validation et étude de l'influence de la discrétisation

Les paramètres du solveur et du préconditionneur sont les mêmes que celles données par la tableau I. Pour étudier l'influence de la résolution sur la précision des résultats nous construisons cinq maillages correspondant à une même frontière artificielle de rayon  $R_{FA} = 1$ . Ces derniers ont les caractéristiques suivantes :



Tableau IX

Caractéristiques des tests de discrétisation du PR pour  $R_{FA} = 1$ 

Test	NNT	NELT	NNI	NELI	NNFA	a
1	375 052	1 874 728	157	264	85 451	0.01886
2	57 380	281 386	136	234	13 641	0.03548
3	17 353	83 312	130	218	3 402	0.05323
4	10 716	49 803	130	218	1 517	0.06319
5	8 573	39 150	130	218	850	0.06847

Pour la même résolution du maillage et pour le même emplacement, la précision des résultats obtenus (Tableau X) en utilisant un schéma de Galerkin classique est inférieure à celle obtenue avec le schéma du type GLS. Le nombre d'itérations et le temps de résolution et de factorisation sont pratiquement identiques pour les deux schémas. De plus, le test 4 présente une faible résolution; pourtant le schéma GLS conduit pour ce test à une bonne précision comparativement au schéma Galerkin classique. Nous adoptons dans la suite de nos essais que le schéma GLS.

Tableau X

Erreur  $L_2$  sur  $\|p\|$  du PR pour différentes fréquences

Fréquence en Hz		100	200	300	400	500	600	700	800
Test 1	$L_2$ sur $\ p\ $ Schéma G.	0.2442	0.8254	3.4195	7.3362	12.5088	19.7418	31.0436	43.2816
	$L_2$ sur $\ p\ $ Schéma GLS.	0.3889	1.2854	2.0722	3.1300	5.3140	7.0897	9.2788	12.5437
Test 4	$L_2$ sur $\ p\ $ Schéma G.	1.2883	2.4770	8.8522	15.7837	28.1569	39.2477	64.5389	86.1087
	$L_2$ sur $\ p\ $ Schéma GLS.	0.9110	2.4051	4.7681	6.7431	10.1258	13.2169	17.2914	27.7625

La figure 23 illustre, pour différents tests, le tracé de l'erreur  $L_2$  sur le module de la pression en fonction de la fréquence. Elle montre bien l'effet de la résolution sur la solution numérique. En faite, plus la résolution est faible plus l'erreur  $L_2$  sur le module de la pression est grande et plus la résolution est fine plus cette erreur est faible et la solution est précise. Le temps CPU varie dans le même sens que l'erreur. Pour Un P4-2GHz de RAM le temps nécessaire pour le test1 (schéma G., 500 Hz) est 1 048 secondes alors que celui du test4 (schéma G., 500 Hz) est 2.5 secondes

Maintenant, nous allons analyser l'effet de la résolution sur l'erreur  $L_2$  du module de la pression pour une fréquence donnée. Les résultats dressés par la table XI pour un schéma GLS nous en disent plus sur le comportement de la solution vis à vis de la discrétisation.

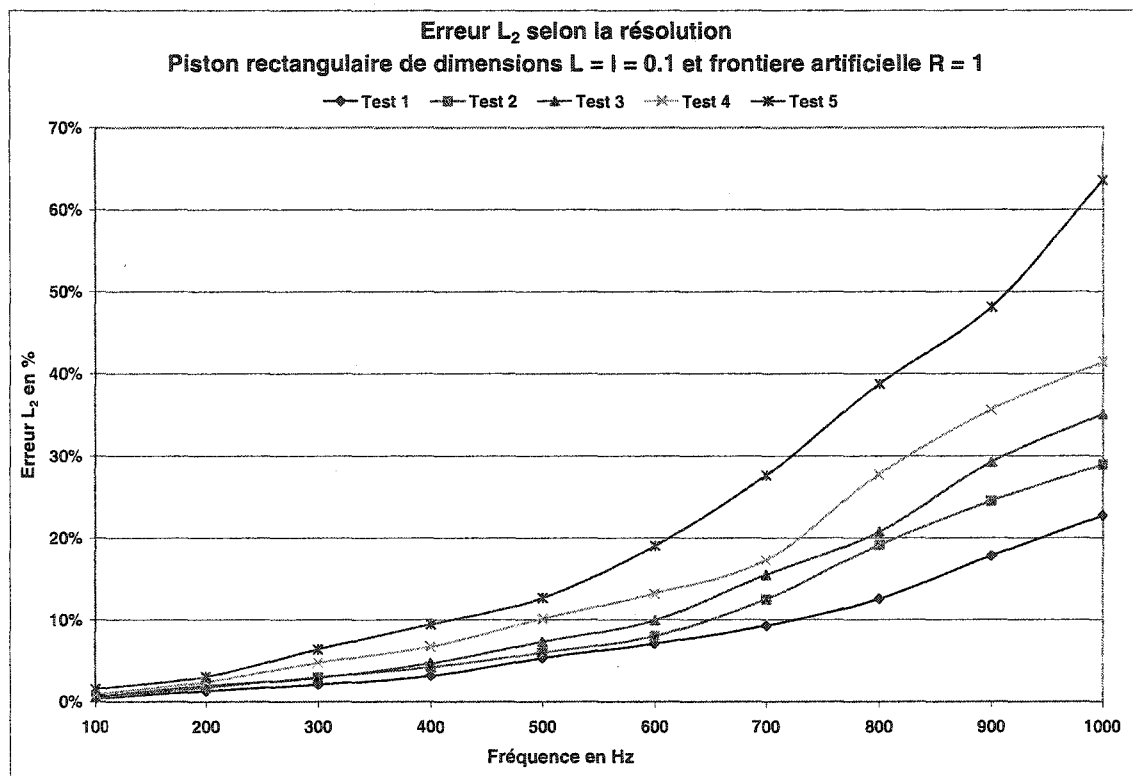


Figure 24 Erreur  $L_2$  du PR selon la fréquence

Tableau XI

Erreur  $L_2$  sur  $\| p \|$  du PR pour différentes résolutions

Fréquence en Hz	Erreur Relative $L_2$ sur le module de la pression en %				
	Test 1	Test 2	Test 3	Test 4	Test 5
100	0.38894	0.48801	0.62113	0.91103	1.53317
200	1.28544	1.70641	1.91184	2.40513	3.06069
300	2.07221	2.96360	2.89446	4.76810	6.40274
400	3.12985	4.20577	4.67811	6.74311	9.44859
500	5.31398	6.00388	7.32276	10.12577	12.66093
600	7.08970	8.02420	9.93868	13.21686	19.03222
700	9.27884	12.49448	15.48008	17.29139	27.63509
800	12.54371	19.12889	20.74486	27.76247	38.75957
900	17.82302	24.48203	29.25290	35.61848	48.09294
1 000	22.69392	28.91384	35.07074	41.43973	63.58371

Pour le même emplacement, la précision des résultats obtenus diminue avec la résolution du maillage. Aussi, plus la fréquence augmente plus la précision est mauvaise (voir aussi figure 24). Comme on l'a vu dans le test I, la précision des résultats dépend aussi de l'emplacement.

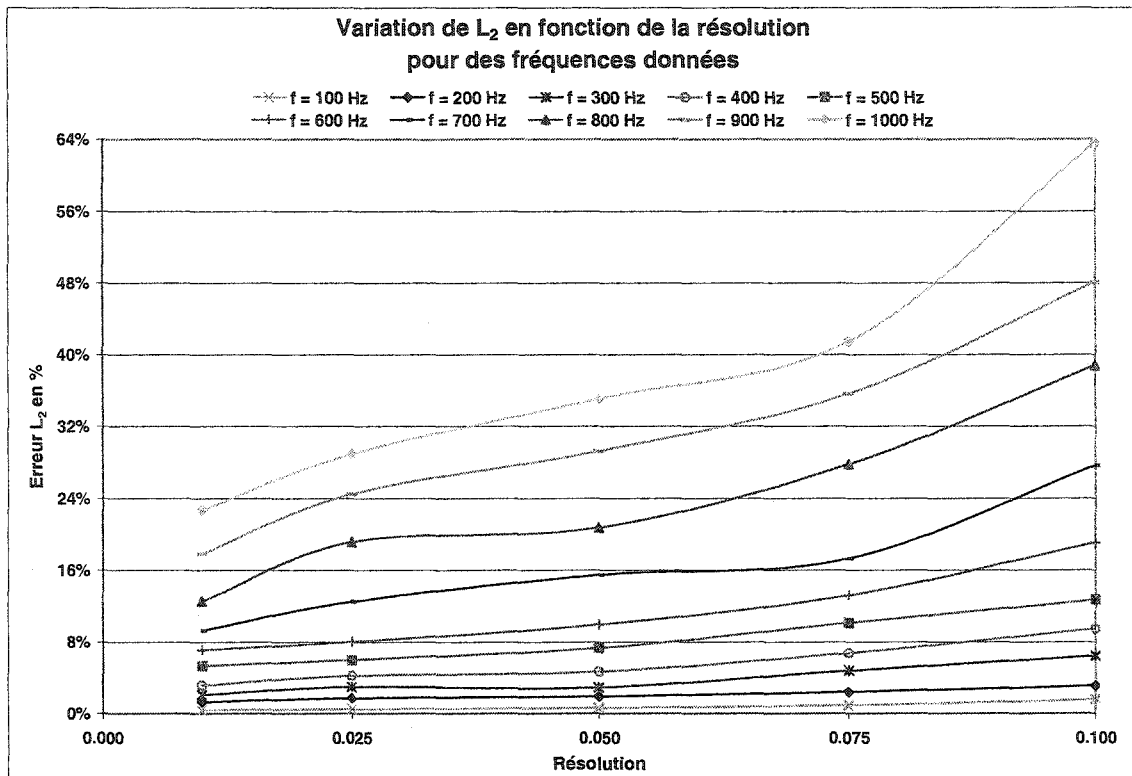


Figure 25 Variation de  $L_2$  du PR selon l'emplacement de FA

### 7.3.2 Influence de l'emplacement de la frontière artificielle

On se donne sept emplacements de la frontière artificielle afin de comparer les résultats qui en découlent. Nous fixons pour tous nos maillages une même moyenne de l'arrête de l'élément tétraédrique à 0.0188. Les sept discrétisations qui s'y réfèrent ont les caractéristiques suivantes :

Tableau XII

Caractéristiques des maillages du PR pour la même "résolution"

Test	$R_{FA}$	NNT	NELT	NNI	NELI	NNFA
1	1	375 052	1 874 728	157	264	85 451
2	0.8	193 335	961 278	165	280	45 081
3	0.6	82 575	406 229	139	232	20 201
4	0.5	48 002	234 518	139	232	11 995
5	0.4	24 968	120 423	156	266	6 416
6	0.3	10 660	50 263	134	226	2 792
7	0.2	3 567	14 983	321	582	828

Si nous déplaçons l'emplacement de la FA et gardons une même "résolution du maillage" nous obtenons les résultats regroupés dans la tableau XIII.

Tableau XIII

Erreur  $L_2$  sur  $\|p\|$  du PR avec GLS pour une même résolution.

$L_2$ sur $\ p\ $	Fréquence en Hz									
	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1 000
Test 1	0.3890	1.2854	2.0722	3.1299	5.3140	7.0897	9.2788	12.5437	17.8230	22.6939
Test 2	0.3531	0.9172	1.9135	2.7006	3.7498	5.6396	6.382	7.5663	9.8596	13.4478
Test 3	0.3854	0.6932	1.2507	2.0498	2.5521	2.8485	4.0504	5.9619	7.2327	8.5972
Test 4	0.4631	0.7188	1.0402	1.6118	2.3967	3.0195	3.3599	3.7808	5.1679	6.9327
Test 5	0.5856	0.8291	1.0920	1.3249	1.6407	2.1848	2.8728	3.5505	4.0193	4.4242
Test 6	0.8734	1.1257	1.4600	1.8009	2.0952	2.3597	2.7204	3.3344	4.2541	5.4522
Test 7	1.8322	2.1170	2.5227	3.0044	3.5349	4.0943	4.6609	5.2089	5.7187	6.2028

Pour la plage de fréquence de 100 à 1 000 Hz, nous remarquons que :

- pour les hautes fréquences, le test 1 fournit une mauvaise précision de la solution. Il sera écarté pour la suite de cette analyse.

- le test 7 fournit de mauvaises précisions pour les basses fréquences. Il sera lui aussi éliminé pour la suite de cette analyse.
- plus la fréquence est élevée plus la FA est à rapprocher de l'objet rayonnant mais pas trop puisque la comparaison de la solution numérique se fait par rapport à celle du champ lointain.
- les tests 2 et 3 s'écartent des autres ( voir figure 25).
- les tests 4, 5 et 6 présentent une bonne précision par rapport aux autres tests.

Dans la plage susmentionnée, les constatations qu'on vient de citer nous révèlent l'existence d'une position optimale de FA pour laquelle la précision est meilleure. Il est clair que si nous voulons trancher sur la position optimale nous devons étaler la plage de fréquences.

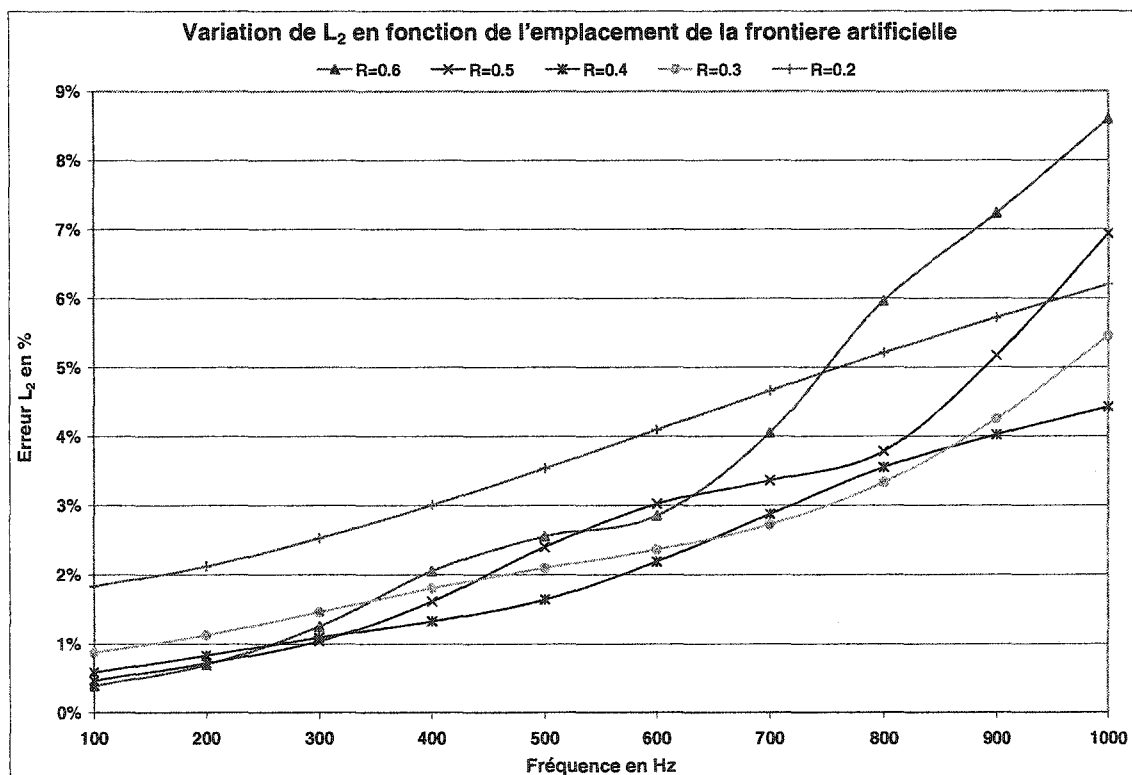


Figure 26 Variation de  $L_2$  du PR en fonction de la fréquence

Etudions maintenant le comportement de la solution en fonction de l'emplacement figure 25. Ce graphique nous renseigne plus sur l'influence de la position et montre combien la solution fournit par le test 3 s'écarte de celle du test 4. En conclusion ne nous retenons que les tests 5 et 6.

Les résultats du tableau XIII peuvent s'analyser autrement. Fixons la fréquence et varions l'emplacement (voir le tracé figure 26). Ceci permet de distinguer que :

- plus la fréquence est basse plus FA peut être éloignée,
- plus la fréquence est élevée plus FA est à rapprocher ,
- Un bon compromis est celui donné pour un emplacement entre  $R = 0.4$  et  $0.6$  .

Nous dressons dans le tableau XV les résultats, relatifs à l'emplacement  $R_{FA} = 0.4$  , concernant le niveau de puissance acoustique, le facteur de puissance, l'évolution de l'erreur  $L_2$  sur le module de la pression et celle du CPU en fonction du nombre adimensionnel  $\lambda/l$  (voir tableau XV) .

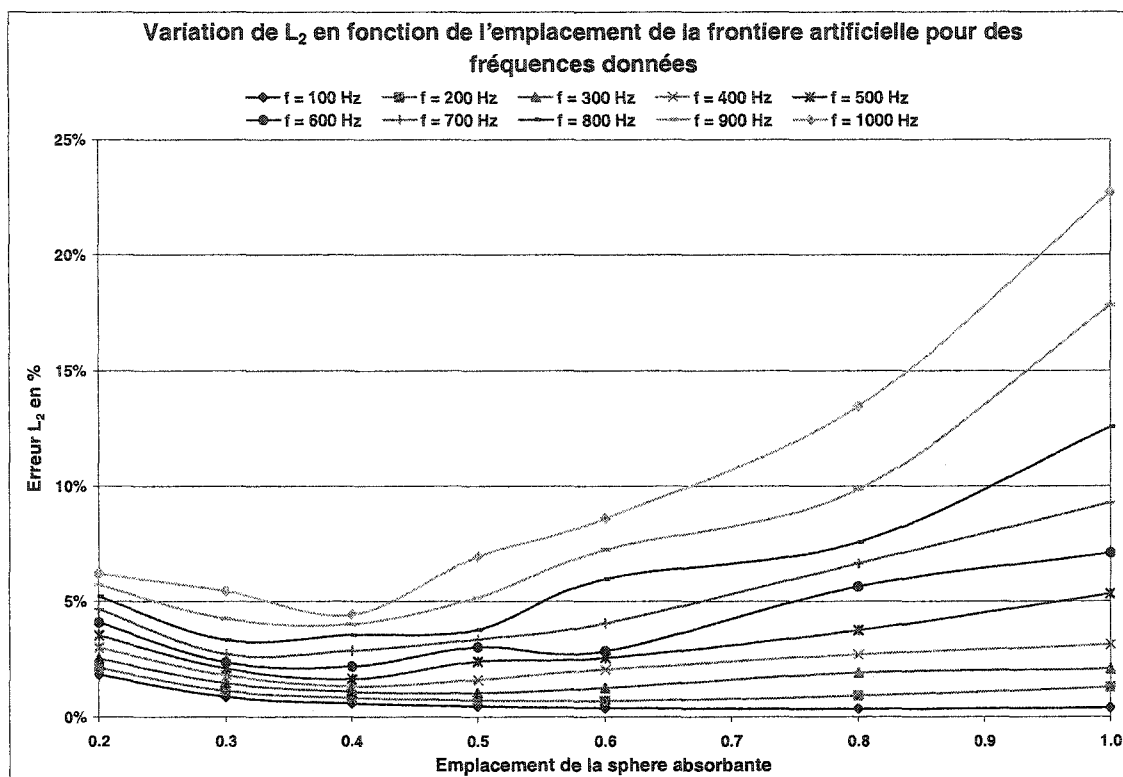


Figure 27 Variation de  $L_2$  du PR en fonction de l'emplacement de FA

Les caractéristiques du maillage de cette simulation numérique sont données par le tableau XIV.

Tableau XIV

Caractéristiques du test du PR pour la FA optimal  $R_{FA} = 0.4$

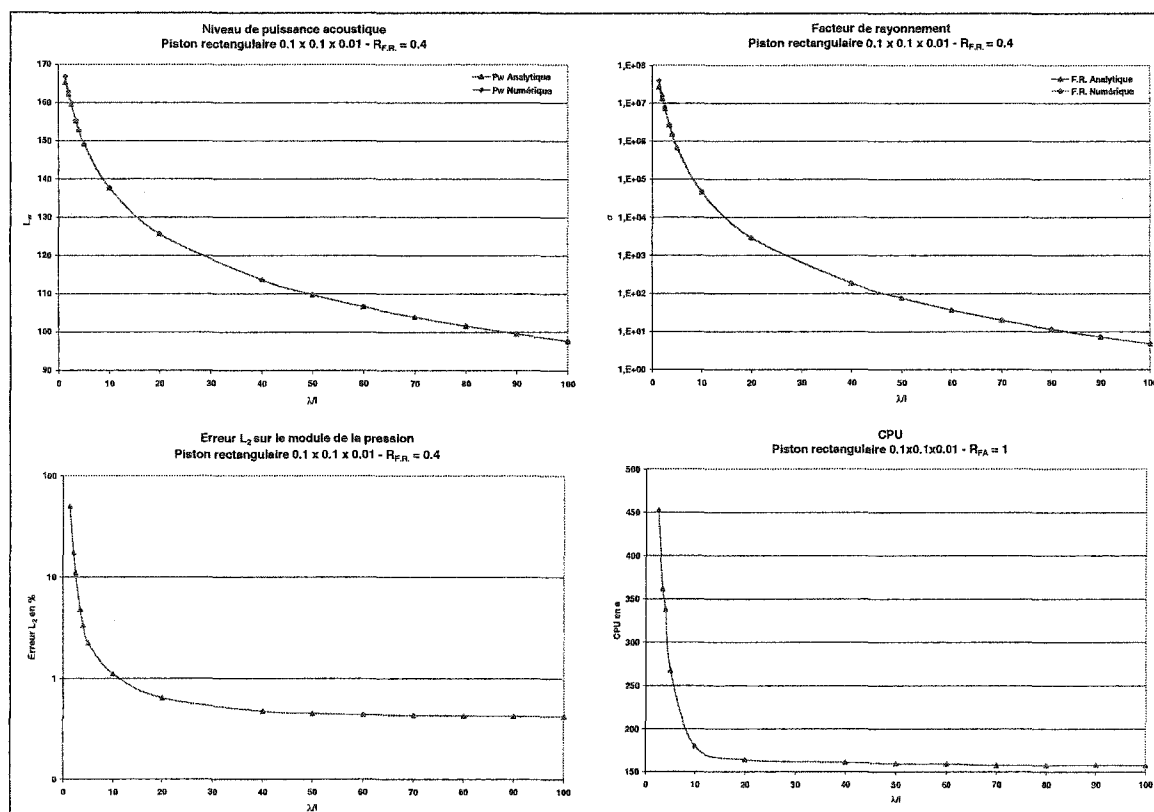
$R_{FA}$	NNT	NELT	NNI	NELI	NNFA	a
0.4	203 503	1 011 851	440	802	47 768	0.009262



Tableau XV

Résultats du test du PR pour la FA optimal  $R_{FA} = 0.4$ 

Label	$\lambda/l$									
	100	80	60	40	20	10	5	4	3.4	2
$L_w$ Anal.	97.75	101.62	106.62	113.66	125.67	137.60	149.22	152.77	155.25	162.15
$L_w$ Numl.	97.74	101.61	106.61	113.65	125.66	137.64	149.06	152.72	155.32	162.82
$\sigma_{ray}$ Anal.	4.767	11.637	36.764	185.90	295.62	4.615e <sup>4</sup>	6.689e <sup>5</sup>	1.516e <sup>6</sup>	2.684e <sup>6</sup>	1.315e <sup>7</sup>
$\sigma_{ray}$	4.744	11.632	36.744	185.74	295.44	4.653e <sup>4</sup>	6.449e <sup>5</sup>	1.497e <sup>6</sup>	2.729e <sup>6</sup>	1.532e <sup>7</sup>
$L_2$ en %	0.423	0.429	0.441	0.475	0.642	1.107	2.233	3.334	4.786	17.564
CPU en s	157.29	157.47	159.08	160.81	163.91	179.80	267.61	337.48	361.28	455.38

Figure 28 Tracé de  $L_w$ ,  $\sigma$ ,  $L_2$  et CPU en fonction de  $\lambda/l$  pour le PR

Plus  $\lambda/l$  est grand plus les résultats sont précis. Le CPU est dans ce cas petit et le niveau de puissance acoustique et la capacité de rayonnement sont petits. Les niveaux de puissance acoustique (respectivement la capacité de rayonnement) analytique et numérique sont quasiment identiques.

Par ailleurs, pour  $\lambda/l=2$  (i.e. une fréquence 1 700 Hz.) l'erreur est importante. La précision est très appréciable pour des fréquences n'excèdent pas 1 500 Hz mais elle reste excessive.

Si nous souhaitons étaler cette plage, nous devons mailler d'avantage le domaine fluide; malheureusement, le logiciel de maillage GID ne le permet pas.

La visualisation des lignes de contour du piston rectangulaire pour les fréquences 100 et 500 Hz est donnée par la figure 36 page 125.

#### 7.4 Test I.3 : Champ d'une sphère pulsante

Dans cette partie nous tenterons de comparer la solution numérique d'une sphère pulsante à de sa solution analytique pour tout le domaine d'étude (voir figure 28). Nous analyserons l'influence de la résolution sur la solution numérique en fixant l'emplacement de la frontière artificielle. Nous étudierons ensuite le comportement de la solution numérique en fonction de l'emplacement pour différentes fréquences et une même résolution.

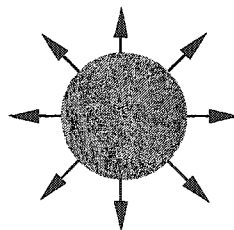


Figure 29 Sphère pulsante

Les cas tests se rapportent à :

- une sphère pulsante «SP» de rayon  $r_o = 0.1$  m
- des frontières artificielles placées à 0.9, 0.7, 0.5, 0.4, 0.3, 0.2 et 0.1 m de la sphère pulsante
- une expression analytique du champ de pression donnée par :

$$p(r) = \frac{\rho \omega^2 r_o^2 w_o (1 + ikr_o)}{r(k^2 r_o^2 + 1)} e^{ik(r-r_o)} \quad (7.5a)$$

- la condition de Neumann :

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{\rho \omega^2 r_o w_o}{(ikr_o - 1)} \left( ikr - \frac{1}{r^2} \right) e^{ik(r-r_o)} \quad (7.5b)$$

La frontière artificielle est une sphère (figure 29). Nous y plaçons les conditions aux limites absorbantes de Bayliss-Gunburger-Turkel de second ordre. L'amplitude des oscillations  $w_o$  est prise égale à l'unité. Les éléments du domaine fluide sont des tétraèdres linéaires. Le domaine fluide est maillé par le logiciel GID.

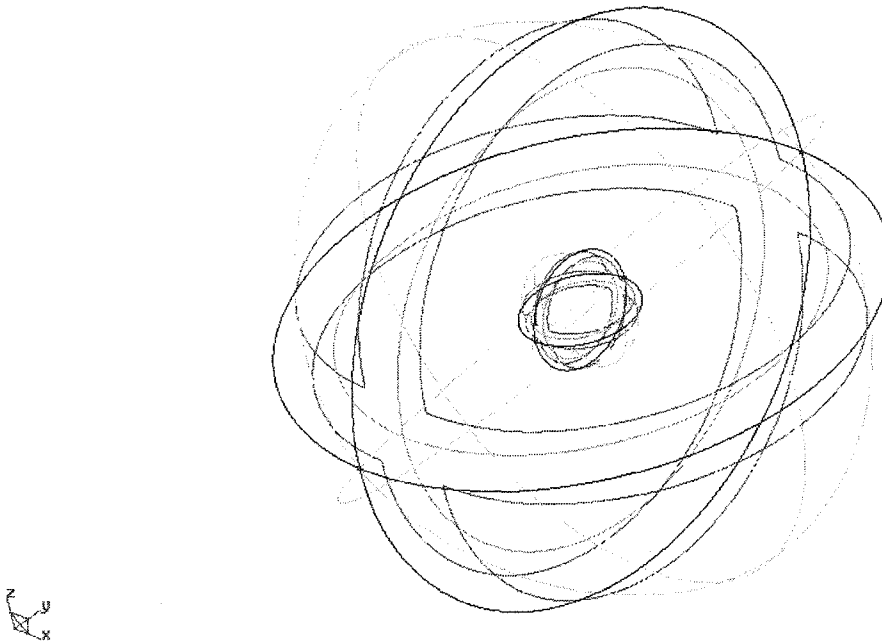


Figure 30 Présentation géométrique de la SP et de la FA par GID

#### 7.4.1 Validation et étude de l'influence de la discrétisation

Les données du solveur et du préconditionneur sont les mêmes que celles données par le tableau I. Pour étudier l'influence de la résolution sur la précision des résultats nous construisons cinq maillages correspondant à une même frontière artificielle de rayon  $R_{FA} = 1$ . Ces derniers ont les caractéristiques suivantes :

Tableau XVI

Caractéristiques des tests de discrétisation de la SP pour  $R_{FA} = 1$

Test	NNT	NELT	NNI	NELI	NNFA	a
1	236 576	1 183 040	710	1 416	75 546	0.02769
2	130 784	651 997	397	790	42 406	0.03377
3	30 920	152 896	94	184	10 446	0.05476
4	19 843	98 315	50	96	6 678	0.05323
5	6 370	30 194	18	32	2 566	0.09404

L'emplacement et la résolution du maillage étant fixés. La précision des résultats obtenus (voir tableau XVII) en utilisant un schéma du type GLS est, dans l'ensemble, supérieure à celle obtenue avec le schéma de Galerkin classique. Même pour une faible résolution (test 5), le schéma de GLS offre une précision meilleure que celle du schéma Galerkin classique. C'est ce premier schéma qui sera considéré pour les tests qui suivent.

Tableau XVII

Erreur  $L_2$  sur  $\| p \|$  de la SP pour une même FA

Fréquence en Hz		100	200	300	400	500	600	700	800
Test 1	$L_2$ sur $\  p \ $ Schéma G.	1.5011	2.3207	4.9574	9.8435	16.8533	23.0307	29.9333	43.6094
	$L_2$ sur $\  p \ $ Schéma GLS.	1.2280	3.7409	5.8237	4.7941	8.8251	11.9046	14.3547	19.8610
Test 5	$L_2$ sur $\  p \ $ Schéma G.	18.6041	18.4741	22.0397	25.7936	38.1282	52.2446	69.0017	89.1577
	$L_2$ sur $\  p \ $ Schéma GLS.	18.0829	17.8065	24.5434	24.9162	24.7806	21.6420	28.8470	41.2781

Le tracé pour les différents tests de l'erreur  $L_2$  sur le module de la pression en fonction de la fréquence est illustré par la figure 30. On distingue bien l'influence de la résolution sur la solution numérique. Ainsi, si la résolution est fine l'erreur  $L_2$  sur le module de la pression est petite et la solution est par conséquent précise.

Maintenant, nous allons fixer la fréquence et nous tentons d'analyser l'effet de la résolution sur l'erreur  $L_2$  du module de la pression. Les résultats regroupés dans le tableau XVIII nous renseignent sur le comportement de la solution vis à vis de la discrétisation.

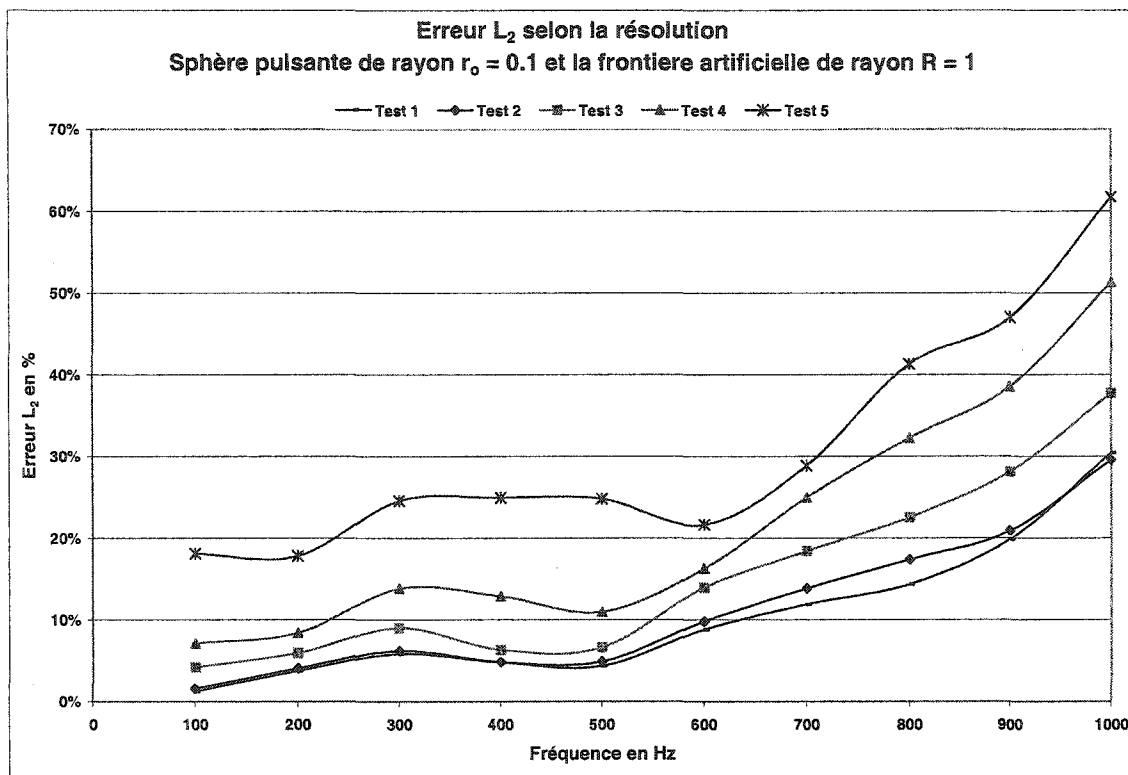


Figure 31 Erreur  $L_2$  de la SP avec GLS selon la fréquence ( $r_0 = 0.1$  et  $R_{FA} = 1$ )

Tableau XVIII

Erreur  $L_2$  sur  $\|p\|$  de la SP pour une même FA

Fréquence en Hz	Erreur Relative $L_2$ sur le module de la pression en %				
	Test 1	Test 2	Test 3	Test 4	Test 5
100	1.22801	1.58089	4.21932	11.49681	18.08294
200	3.74088	4.06370	5.95725	11.60720	17.80647
300	5.82365	6.21049	9.00698	18.23671	24.54337
400	4.79405	4.83579	6.33942	18.63927	24.91622
500	4.35430	4.90011	6.62669	18.01784	24.78064
600	8.82511	9.80855	13.94613	20.04127	21.64196
700	11.90460	13.85218	18.41336	31.32383	28.84703
800	14.35474	17.37154	22.53054	44.68152	41.27806
900	19.86099	20.89933	28.10310	50.94128	46.99644
1000	30.40064	29.53933	37.71101	58.61399	61.71284

La précision des résultats obtenus, en fixant l'emplacement, diminue avec la résolution du maillage. Sa valeur n'est plus bonne pour les grandes fréquences (voir aussi figure 31).

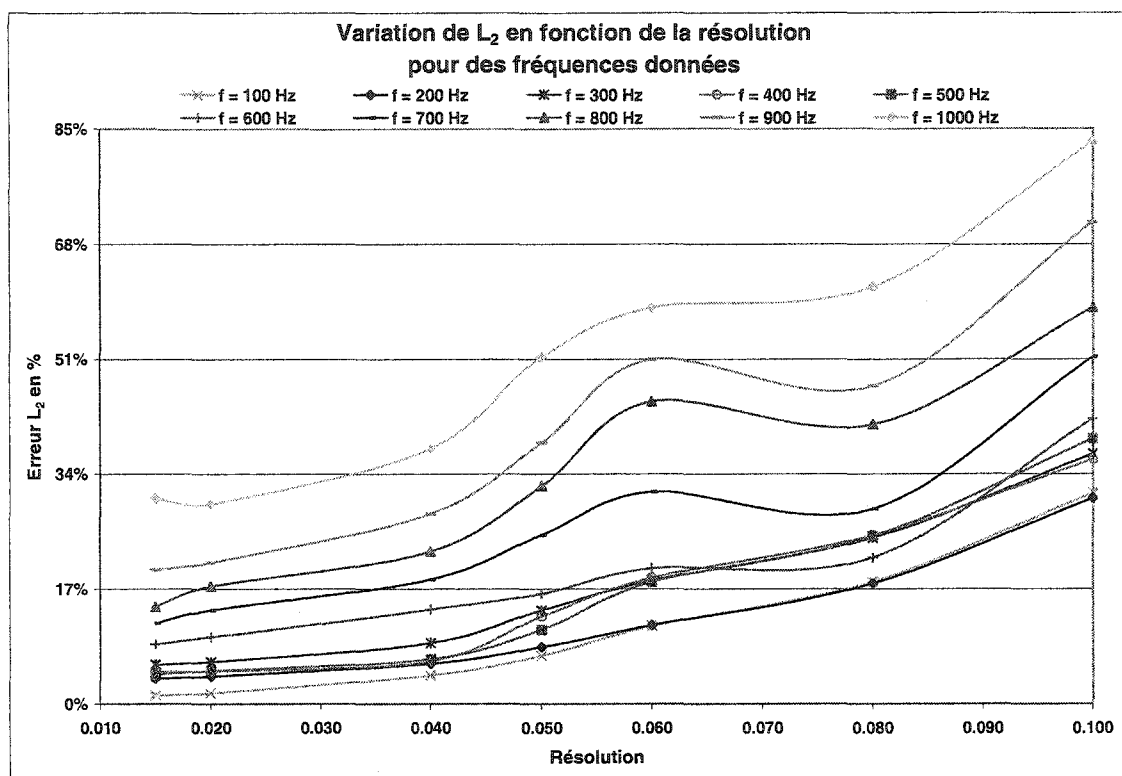


Figure 32 Variation de  $L_2$  de la SP en fonction de la résolution

#### 7.4.2 Influence de l'emplacement de la frontière artificielle

On se dote de sept emplacements de FA en vue de comparer les résultats qui en découlent. On prend pour tous nos maillages une moyenne de l'arrête de l'élément tétraédrique de 0.02765. Les sept discrétisations résultantes ont les caractéristiques indiquées dans la table XIX.

Tableau XIX

Caractéristiques des maillages de la SP pour la même "résolution"

Test	$R_{FA}$	NNT	NELT	NNI	NELI	NNFA
1	1	236 576	1 183 040	710	1 416	75 546
2	0.8	122 381	608 536	581	1 158	39 974
3	0.6	51 641	255 729	445	886	16 998
4	0.5	30 157	148400	366	728	10 170
5	0.4	15 298	74 497	306	608	5 304
6	0.3	6 605	30 860	272	540	2 598
7	0.2	1 982	8 393	218	432	930

Si nous varions la position de FA et nous gardons la même "résolution du maillage", nous obtenons les résultats regroupés dans le tableau XX.

Tableau XX

Erreur  $L_2 \| p \|$  de la SP avec GLS pour une même résolution

$L_2$ sur $\  p \ $	Fréquence en Hz									
	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1 000
Test 1	1.2280	3.7409	5.8237	4.7941	4.3543	8.8251	11.9046	14.3547	19.8610	30.4006
Test 2	1.2614	2.3669	5.1529	5.6299	4.0433	3.4318	6.5594	10.3922	13.4314	17.3459
Test 3	1.3443	1.2657	3.2243	5.4247	6.2097	5.6121	4.5636	4.2553	5.6058	8.3727
Test 4	1.4875	1.1945	2.1112	4.4571	6.4140	7.1483	6.6289	5.4334	4.8555	5.6569
Test 5	1.6045	1.3971	1.2467	2.5271	4.5683	6.4181	7.5656	7.8576	7.3951	6.5877
Test 6	1.8040	1.7419	1.4847	1.3602	2.1568	3.6944	5.4977	7.2608	8.7744	9.9163
Test 7	2.2115	2.2362	2.2254	2.1699	2.1174	2.1690	2.4345	2.9596	3.7144	4.6410

Pour la plage de fréquence de 100 à 1 000 Hz, nous constatons que :

- pour les hautes fréquences, le test 1 et 2 fournit une mauvaise précision de la solution. Ils seront écartés pour la suite de cette analyse (voir figure 32).
- plus la fréquence est élevée plus FA est à rapprocher de l'objet rayonnant



L'emplacement optimal s'avère difficile pour la sphère pulsante. Pour pouvoir trancher sur l'emplacement optimal, il est indispensable d'étaler cette plage beaucoup plus. Nous préférons, pour le moment, fournir un graphique similaire à celui du test I.1 et I.2, qui nous renseigne sur le comportement de la solution en fonction de l'emplacement.

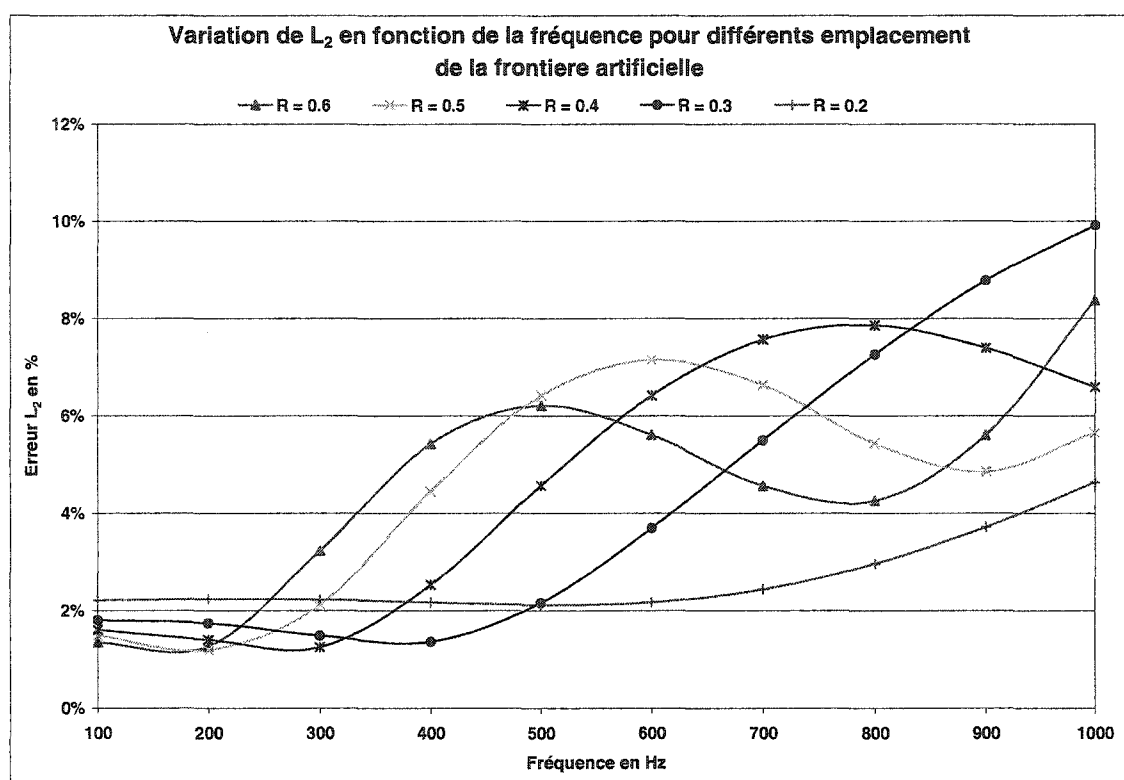


Figure 33 Variation de  $L_2$  de la SP en fonction de la fréquence

La figure 32, montre bien combien l'emplacement optimal est difficile à localiser. Nous retenons que les tests 5 et 6 qui offrent de bonnes précisions.

Si nous fixons la fréquence et nous varions l'emplacement nous obtenons le tracé de la figure 33. Nous y remarquons que :

- plus la fréquence est élevée plus la frontière artificielle est à rapprocher
- plus la fréquence est basse plus la frontière artificielle est à placé à moins de cinq fois le rayon de la sphère pulsante

- un bon compromis est celui donné pour un emplacement de  $R = 0.2$ .

La table XXII se rapporte à l'emplacement  $R_{FA} = 0.2$  et dresse les résultats du niveau de puissance acoustique, du facteur de puissance, de l'évolution de l'erreur  $L_2$  sur le module de la pression et celle du CPU en fonction du nombre adimensionnel  $\lambda/r_0$ .

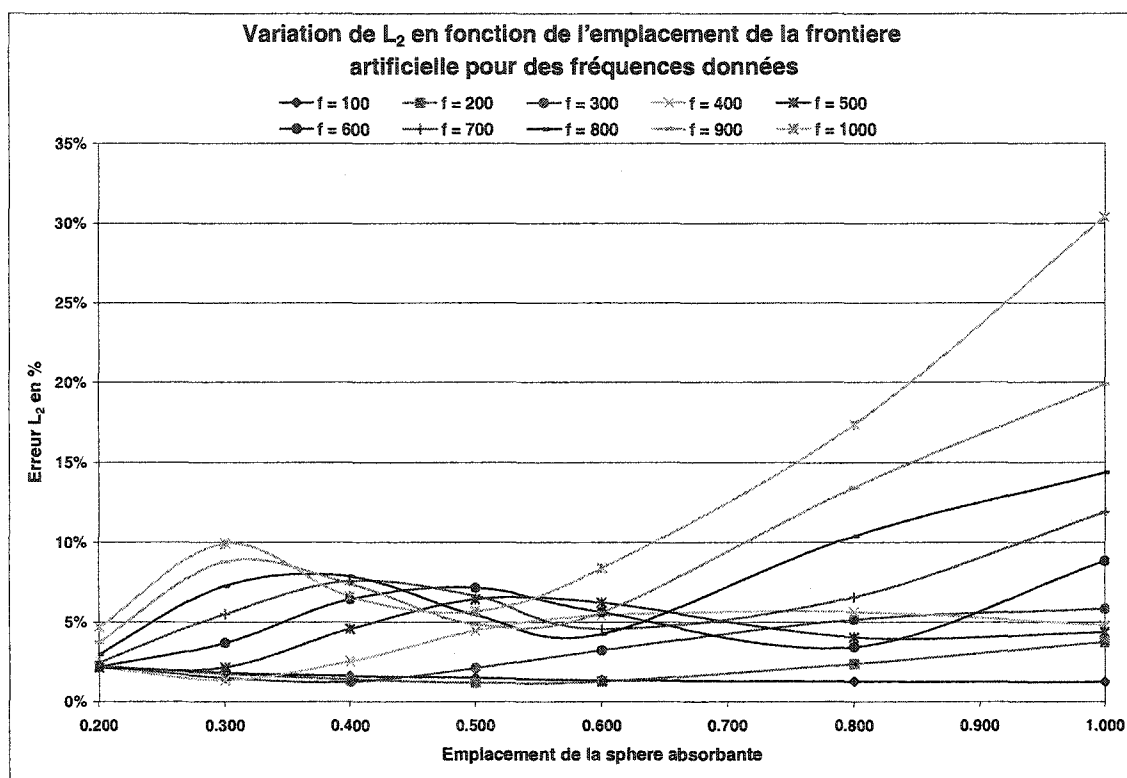


Figure 34 Variation de  $L_2$  de la SP en fonction de l'emplacement de FA

Le tableau XXI donne les caractéristiques du maillage de l'emplacement  $R_{FA} = 0.2$ .

Tableau XXI

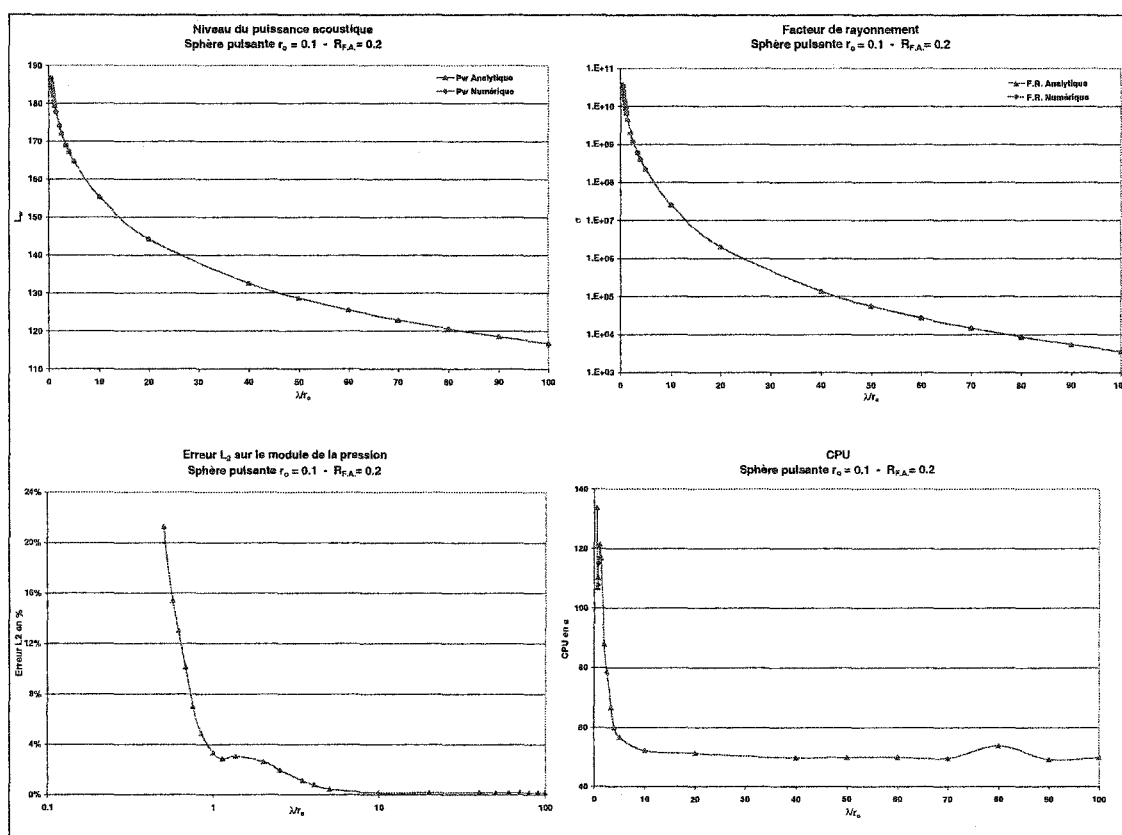
Caractéristiques du test de l'emplacement optimal  $R_{FA} = 0.2$

$R_{FA}$	NNT	NELT	NNI	NELI	NNFA	a
0.2	128 720	620 149	7 312	14 022	21 188	0.006571

Tableau XXII

Résultats du test de la SP pour l'emplacement optimal  $R_{FA} = 0.2$ 

Label	$\lambda/r_o$									
	100	60	20	10	5	2	0.85	0.68	0.57	0.50
$L_w$ Anal.	116.70	125.55	144.27	155.27	164.64	174.32	182.09	184.05	185.65	186.75
$L_w$ Numl.	116.69	125.54	144.26	155.26	164.66	174.18	182.13	183.99	185.42	186.80
$\sigma_{ray}$ Anal.	$3.538e^3$	$2.711e^4$	$2.020e^6$	$2.546e^7$	$2.203e^8$	$2.042e^9$	$1.22e^{10}$	$1.92e^{10}$	$2.78e^{10}$	$3.58e^{10}$
$\sigma_{ray}$ Num.	$3.532e^3$	$2.706e^4$	$2.017e^6$	$2.544e^7$	$2.212e^8$	$1.982e^9$	$1.23e^{10}$	$1.89e^{10}$	$2.63e^{10}$	$3.62e^{10}$
$L_2$ en %	0.1604	0.1606	0.1585	0.1351	0.4325	2.6599	4.8892	10.142	15.417	21.277
CPU en s	49.73	49.84	51.08	52.13	56.73	87.91	115.44	107.98	120.72	133.56

Figure 35 Tracé de  $L_w$ ,  $\sigma$ ,  $L_2$  et CPU en fonction de  $\lambda/r_o$  pour la SP

Plus  $\lambda/r_0$  est grand plus le niveau de puissance acoustique et la capacité de rayonnement sont petits. Au delà de la fréquence de 3 400 Hz ( $\lambda/r_0 = 1$ ), l'erreur ainsi que le CPU augmentent relativement vite.

Comme pour les tests I et II, la différence entre les niveaux de puissance acoustique (respectivement la capacité de rayonnement) analytique et numérique est faible.

L'erreur devient importante lorsque la fréquence dépasse 6 000 Hz (i.e.  $\lambda/r_0 = 0.57$ ). Par ailleurs, le code donne pour la sphère pulsante une précision très appréciable et son application s'étend sur la plage 100 à 6 000 Hz. La visualisation des lignes de contour de la sphère pulsante pour les fréquences 100 et 500 Hz est donnée par la figure 37.

### Remarque

Connaissant les valeurs de la pression sur la frontière artificielle nous pouvons déduire numériquement celle se trouvant en un point  $r \geq R_{FA}$  par le biais de l'expansion de Atkinson-Wilcox (Voir Annexe I).

## 7.5 Conclusion

Les différentes simulations numériques qu'on vient de voir montrent l'influence de l'emplacement sur la précision de la solution. Elles montrent aussi que la condition de Bayliss-Gunburger-Turkel d'ordre 2 donne d'excellents résultats pour une frontière artificielle proche de l'obstacle d'un ratio de trois à cinq fois la caractéristique principale de l'objet rayonnant. Nous retenons aussi ce qui suit :

- plus la fréquence est élevée plus il faut rapprocher la FA.
- plus la fréquence est faible plus la FA est à éloigner légèrement du corp rayonnant.
- pour les fréquences supérieures à 1 000 Hz nous devons en plus de rapprocher la FA mailler plus le domaine fluide.

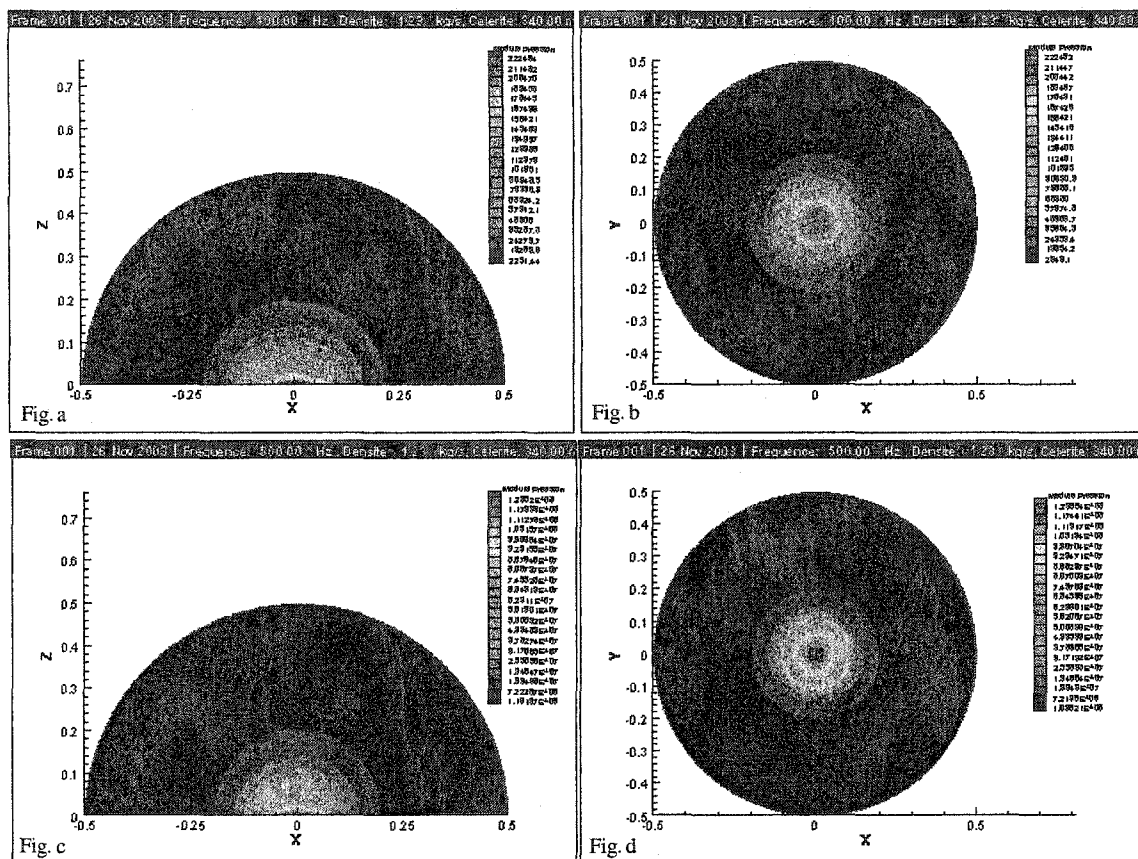


Figure 36 Lignes de contour (solution numérique) pour le piston circulaire

de rayon  $r_p = 0.1$  et une frontière artificielle de rayon  $R_{FA} = 0.5$

Fig. a et b : sont relatives à une fréquence de 100 Hz

Fig. c et d : sont relatives à une fréquence de 500 Hz

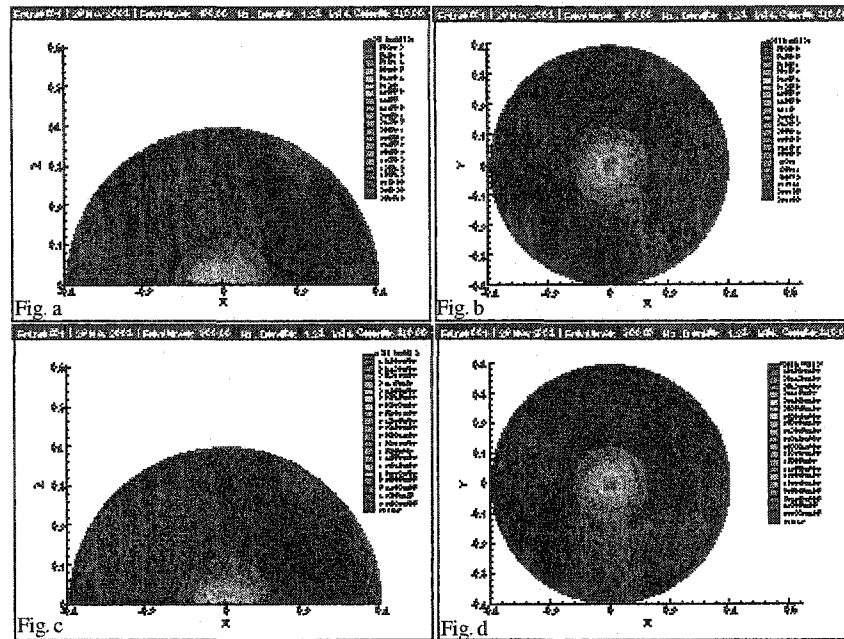


Figure 37 Lignes de contour (solution numérique) pour le piston rectangulaire

de rayon  $l = L = 0.1$  et une frontière artificielle de rayon  $R_{FA} = 0.4$

Fig. a et b : sont relatives à une fréquence de 100 Hz

Fig. c et d : sont relatives à une fréquence de 500 Hz

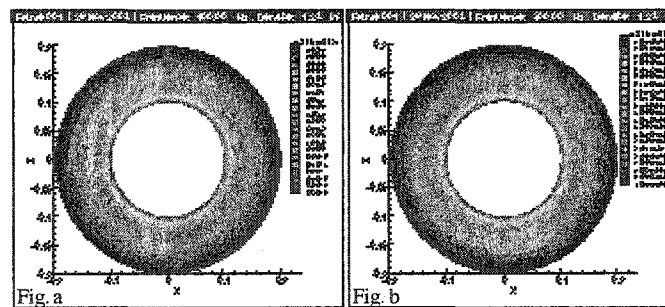


Figure 38 Lignes de contour (solution numérique) pour le sphère pulsante

de rayon  $r_s = 0.1$  et une frontière artificielle de rayon  $R_{FA} = 0.2$

Fig. a : est relative à une fréquence de 100 Hz

Fig. b : est relative à une fréquence de 500 Hz

## CHAPITRE 8

### TESTS NUMÉRIQUES II RAYONNEMENT D'UNE PLAQUE MINCE

Les plaques minces exposées à un fluide représentent le type de structure simple à intérêt pratique qui permet d'étudier le phénomène de rayonnement. Ce type de géométrie a été traité par plus qu'un chercheur [7, 15, 16, 34].

Dans cette partie, nous évaluons le champ sonore rayonné, dans l'air, par des plaques fines minces simplement appuyées et nous comparons la solution numérique sur la frontière artificielle à la solution analytique du champ lointain (annexe V).

Comme dans la partie tests numériques I pour une même résolution, nous étudierons d'abord l'influence de l'emplacement de la FA sur la solution numérique pour différentes fréquences.

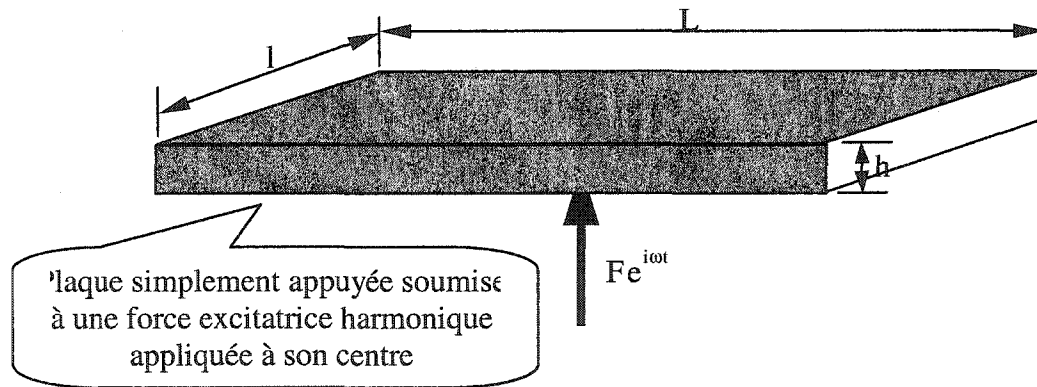


Figure 39 Rayonnement d'une plaque simplement appuyée

Nous avons effectué des tests sur une plaque rectangulaire mince de dimension  $L \times l \times h$  excitée à son centre par une force  $F$  (figure 38).. La plaque est simplement appuyée «PSA» à ses bords et ses vecteurs propres et valeurs propres sont calculés avec le logiciel ANSYS. Tous les tests se feront avec le schéma GLS

La frontière artificielle est placée à 0.9, 0.7, 0.65, 0.5, et 0.4 m de la plaque (figure 39).

L'expression analytique du champ de pression lointain est donnée pour l'air par:

$$p(r) = \rho \omega^2 F \frac{e^{ikr}}{2\pi r} \sum_{m=0} \sum_{n=0} \frac{4(-1)^m (-1)^n k_m k_n \cos k_m x_0 \cos k_n y_0 \cos \gamma_x L_x \cos \gamma_y L_y}{D L_x L_y (k_m^2 - \gamma_x^2)(k_n^2 - \gamma_y^2)((k_m^2 + k_n^2)^2 - \mu^4)} \quad (8.1)$$

La condition de Neumann pour ce cas de problème est :

$$\frac{dp}{dr} = -\rho \omega^2 w(x, y) \quad (8.2)$$

Le déplacement transversal de la plaque est donnée par (voir les annexes III et V) :

$$w(x, y) = \sum_{m=0} \sum_{n=0} F \frac{\cos k_m x_0 \cos k_n y_0}{D L_x L_y ((k_m^2 + k_n^2)^2 - \mu^4)} \cos k_m x \cos k_n y \quad (8.3)$$

La puissance acoustique active mesurée sur la frontière artificielle :

$$P(\omega) = \oint_{S_{F.A.}} \frac{|p|^2}{2\rho_f c} dA \quad (8.4)$$

Le facteur de rayonnement est :

$$\sigma(\omega) = \frac{P(\omega)}{\rho_f c S_{F.A.} \langle V^2(\omega) \rangle} \quad (8.5)$$

La vitesse vibratoire normale à  $S_1$  est:

$$\langle V^2(\omega) \rangle = \frac{1}{S_1} \oint_{S_1} V^2(\omega) dA \quad (8.6)$$

Le niveau de puissance vaut :

$$L(\omega) = 10 \log \left( \frac{P(\omega)}{P_0} \right) \quad (8.7)$$

$S_1$  : aire de la structure vibrante.

$S_{F.A.}$  : aire de la frontière artificielle.

$\langle V^2(\omega) \rangle^{1/2}$  : vitesse vibratoire normale à  $S_1$ , en valeur moyenne sur l'espace.

$P_0$  : puissance acoustique de référence. Pour l'air  $P_0 = 10^{-12} \text{ W}$ .



La frontière artificielle et la plaque se présentent comme indiqué sur la figure 39. Les conditions aux limites absorbantes de Bayliss-Gunburger-Turkel du second ordre sont appliquées. Le maillage du domaine fluide est réalisé avec le logiciel GID et celui de la plaque avec ANSYS. Les éléments du maillage fluide sont des tétraèdres linéaires alors que ceux de la plaque sont des quadrilatères linéaires. Le logiciel Matcher [37] est utilisé pour le transfert des données à l'interface fluide-structure. L'amplitude de la force d'excitation est prise égale à l'unité. Tous les nœuds de la frontière artificielle sont considérés comme des points lointains par rapport à la plaque. Le tableau Tab.II.1 regroupe les données principales des deux domaines d'étude.

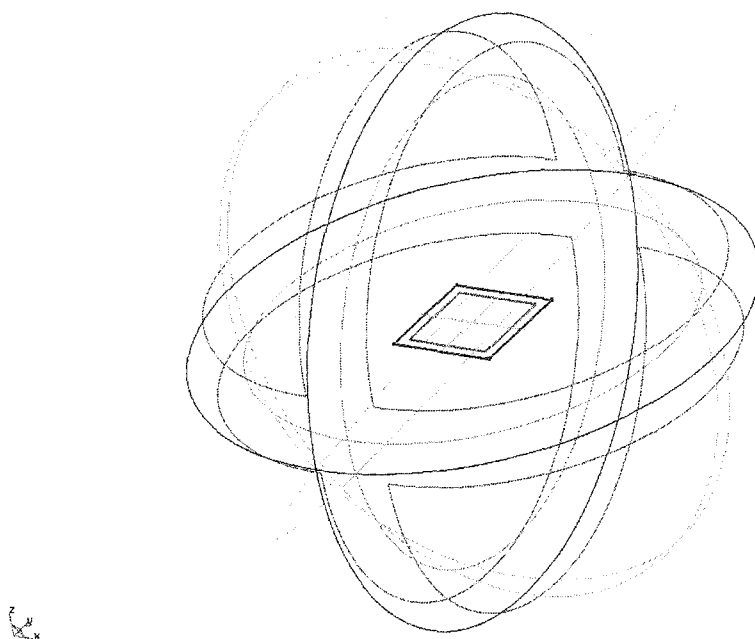


Figure 40 Présentation géométrique de la PSA et de la FA par GID

Tableau XXIII

Données principales du test de couplage fluide-structure

	Grandeur	Valeur
Structure : Plaque	Nature	Acier
	Module de Young	$E = 2.110^{11} \text{ N m}^{-2}$
	Masse volumique	$\rho_s = 7800 \text{ kg m}^{-3}$
	Coefficient de Poisson	$\nu = 0.3$
	Longueur de la plaque	$2 L_x = 0.2 \text{ m}$
	Largeur de la plaque	$2 L_y = 0.2 \text{ m}$
	Hauteur de la plaque	$h = 0.002 \text{ m}$
Fluide	Force	$F = 1 \text{ N}$
	Nature	air
	Masse volumique	$\rho_f = 1.225 \text{ kg m}^{-3}$
	Célérité	$c = 340 \text{ m s}^{-1}$

Les paramètres relatifs au solveur, au préconditionneur et au critère de convergence du code de couplage de tous nos tests sont donnés par la table XXIV.

Tableau XXIV

Paramètres concernant le solveur, le préconditionneur, le couplage

Grandeur	Valeur
lfil	nnz / n
Tol du préconditionneur ILUT	$10^{-5}$
Dimension de l'espace de krylov	im = 50
Facteur de décroissance du résidu	$10^{-8}$
Critère de convergence du couplage	$10^{-5}$

### 8.1 Influence du nombre de nœuds structures de l'interface

Pour montrer à quel point le nombre de nœuds structures influe sur la pression calculée, nous considérons deux maillages de la structure; un grossier et l'autre fin ayant

respectivement 441 et 10 201 noeuds. Les deux tests se feront pour le même emplacement de la frontière artificielle  $R_{FA} = 0.6$ . Les résultats numériques sont dressés sur le tableau XXV.

Tableau XXV

Influence du NN structures sur la précision pour  $R_{FA} = 0.6$

$L_2$ sur $\ p\ $	Fréquence en Hz									
	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1 000
Test 1	0.6115	0.9671	1.9782	3.9064	5.0000	4.7315	3.9745	5.7567	9.3675	12.8070
Test 2	0.5561	0.9487	1.9466	3.5268	4.5497	4.4192	3.8952	5.7951	9.3410	12.7306

Nous constatons qu'une augmentation de la résolution du maillage de la structure (peu près 20 fois) apporte une légère amélioration de la précision de la solution (4% en moyenne). La figure 40 nous dit plus sur cette influence. Nous n'allons prendre pour la suite de cette analyse que le premier maillage.

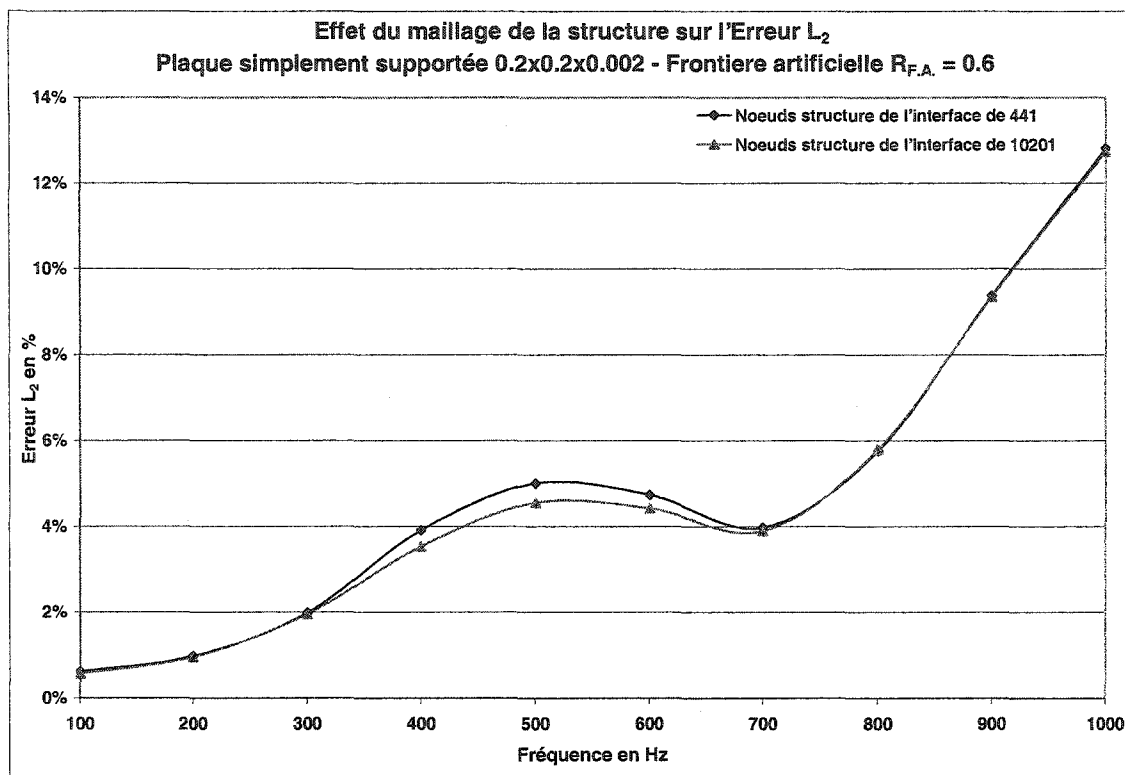


Figure 41 Erreur  $L_2$  de la PSA pour deux types de maillage de la structure

## 8.2 Influence de l'emplacement de la frontière artificielle

Dans la partie tests numériques I nous nous sommes intéressés aux champs sonores traduisant la réponse du milieu fluide aux vitesses prescrites aux sources et nous avons étudié l'effet de l'emplacement de la frontière artificielle (FA). Dans la présente partie on s'intéresse à la réponse du milieu fluide à une plaque élastique simplement appuyée excitée harmoniquement par une force à son centre. Nous réitérons la même stratégie dans le but d'étudier l'effet de l'interaction sur le couple précision - emplacement.

Pour ce faire, nous nous dotons de cinq positions de la FA et nous fixons la côte moyenne de l'arête de l'élément tétraédrique des maillages à 0.0215.

Le nombre de nœuds de la plaque est de 441 nœuds. Les cinq discrétisations du domaine fluide ont les caractéristiques données par la table XXVI.

Tableau XXVI

Caractéristiques des maillages de la PSA pour la même "résolution"

Test	$R_{FA}$	NNT	NELT	NNI	NELI	NNFA
1	1	535 422	2 669 917	20 209	38 806	154 074
2	0.8	261 917	1 299 383	20 045	38 486	66 978
3	0.75	204 451	1 011 326	26 311	50 618	42 162
4	0.6	103 804	511 155	20 045	38 486	15 126
5	0.5	62 475	305 110	20 062	38 520	1 630

En faisant changer l'emplacement de FA pour la même "résolution du maillage", nous obtenons les résultats regroupés dans le tableau XXVII.

Tableau XXVII

Erreur  $L_2 \| p \|$  de la PSA pour différentes fréquences

$L_2$ sur $\  p \ $	Fréquence en Hz									
	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1 000
Test 1	0.4573	2.7980	5.5644	4.3900	5.0940	9.4633	11.6009	16.8475	25.1777	30.9913
Test 2	0.4710	1.5743	4.1479	4.9534	3.4042	3.5107	6.6878	9.1363	11.5684	15.9068
Test 3	0.5141	1.4294	3.8928	5.3899	4.5901	3.7870	5.9821	8.6542	11.1452	14.6210
Test 4	0.6674	1.0599	2.3466	4.5223	5.4997	4.5278	3.6269	6.5269	10.1622	13.4057
Test 5	1.1239	1.4053	2.4477	4.5911	6.4943	7.1078	6.6920	8.5933	12.9426	16.8435

Pour la plage de fréquence de 100 à 1 000, nous constatons que :

- pour les hautes fréquences, le test 1 fournit la plus faible précision de la solution.

Nous ne tenons pas compte de ce test dans la suite de cette analyse.

- plus la fréquence est élevée, plus la frontière artificielle est à rapprocher de l'objet rayonnant (voir aussi figure 41) mais pas trop pour ne pas compromettre notre raisonnement.
- les tests 2, 3, 4 et 5 fournissent des précisions qui sont très serrées entre elles ce qui rend difficile la localisation de l'emplacement optimal pour la plage susmentionnées.

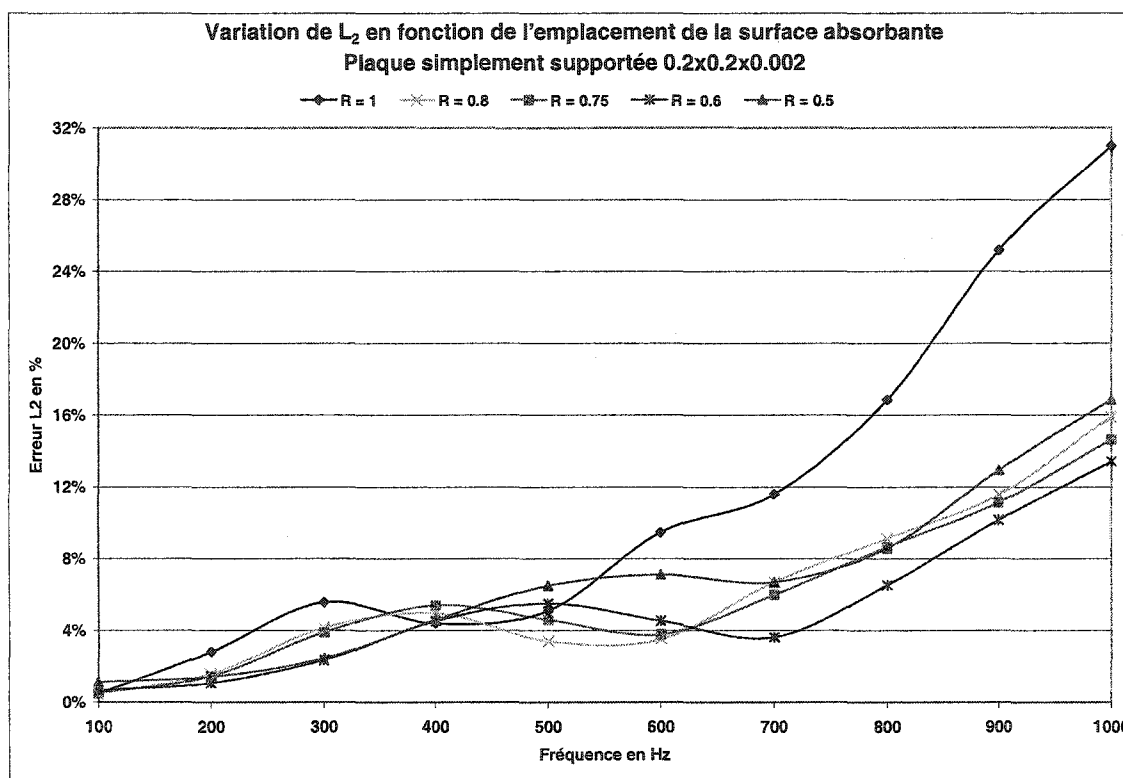


Figure 42 Erreur  $L_2$  de la PSA en fonction de la fréquence

Pour pouvoir trancher sur l'emplacement optimal, il est indispensable d'étaler la plage des fréquences des tests. Nous préférons d'abord tracer les résultats de la table XXVII en fonction de l'emplacement tout en fixant la fréquence. Le tracé figure 42 permet de distinguer que :

- plus la fréquence est élevée plus la frontière artificielle est à rapprocher mais pas trop

- plus la fréquence est basse plus la frontière artificielle peut être éloignée; ceci a pour inconvénient de mailler finement un domaine important
- un bon compromis est celui donné pour un emplacement de rayon  $R = 0.6$  et qui correspond à un rapport de trois fois celui de la côte principale de la plaque.

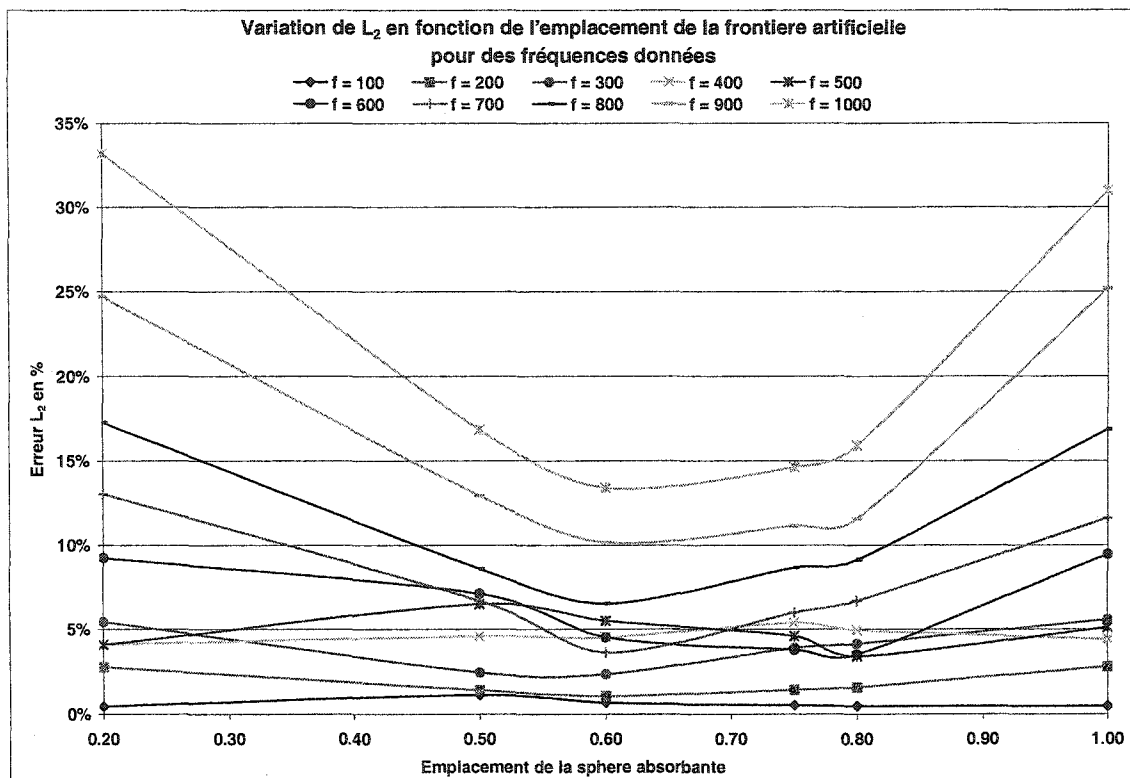


Figure 43 Erreur  $L_2$  de la PSA en fonction de l'emplacement de la FA

### 8.3 Influence du nombre de nœuds fluides de l'interface

La solution numérique dépend fortement du nombre de points fluides de l'interface fluide-structure. Plus ce nombre est élevé plus cette solution est bonne. Afin de montrer l'effet de ce nombre sur la précision, nous considérons quatre maillages correspondant à un même emplacement  $R_{FA} = 0.5$ . Les résultats des simulations, pour une fréquence de 500 Hz, sont regroupés dans la table XXVIII.

Tableau XXVIII

Erreur  $L_2$  de  $\| p \|$  en fonction du NNI fluides pour  $R_{FA} = 0.5$

NNT	NELT	NNI	NELI	NNFA	a	$L_2$
27 521	134 721	8 187	15 570	1 630	0.02856	6.4559
46 447	228 623	13 913	26 622	1 630	0.02894	6.3698
62 475	305 110	20 062	38 520	1 630	0.02175	6.0803
80 189	391 053	26 420	50 836	1 630	0.02002	5.7206

Il s'en suit qu'une augmentation du nombre de nœuds fluides de l'interface de 70% génère une amélioration de la précision de la solution de 13%.

Des résultats du tableau XXVIII, on voit que l'augmentation du nombre des nœuds fluides de l'interface s'est accompagnée d'une augmentation du nombre de nœuds fluides total. Donc, on dirait que l'amélioration de la précision est due au NNT et non au NNI fluides puisqu'une augmentation du NNT, comme on l'a déjà vu, entraîne une amélioration de la précision. Pour nous, l'objectif est d'augmenter le NNI tout en gardant le même ratio de résolution. C'est ce qu'on a fait; mais le logiciel GID procède automatiquement par une augmentation du NNT lorsqu'on lui demande de générer un maillage structuré par ligne.

## 8.4 Résultats concernant l'emplacement optimal

### 8.4.1 Nœuds de l'interface

Nous essayons ici de comparer la solution numérique à la solution analytique de la déflexion de la PSA donnée par (8.3) et appliquée une fois aux nœuds structures et une autre fois aux nœuds fluides de l'interface. Le tableau XXX donne les erreurs en norme  $L_2$  sur le déplacement transversal de la plaque pour les deux catégories de nœuds et la figure 43 fournit le tracé de ces erreurs en fonction de la fréquence.



Tableau XXIX

NNI fluides et structures pour l'emplacement optimal  $R_{FA} = 0.6$ 

$R_{FA}$	NNI fluides	NNI structures
0.6	20 045	10 201

Tableau XXX

Erreur  $L_2$  sur  $u_z$  des nœuds structures et fluides pour  $R_{FA} = 0.6$ 

$L_2$ sur	Fréquence en Hz									
$u_z$	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1 000
<b>Struct.</b>	0.5494	0.4837	0.4274	1.0207	1.9154	2.9185	3.8569	4.4547	4.4466	3.7930
<b>Fluide</b>	0.5674	0.2513	0.7885	1.1426	1.8551	2.6044	3.2313	3.5842	3.5388	3.0207

Nous distinguons du tracé donné par la figure 43 que :

- l'erreur générale sur les nœuds de l'interface est relativement faible pour la plage de fréquence 100 – 1000 Hz.
- les erreurs sur les nœuds fluides sont inférieures à celle des nœuds structures, ceci est une conséquence directe du NNI fluides qui est supérieur au NNI structures et de la définition de la norme  $L_2$ .

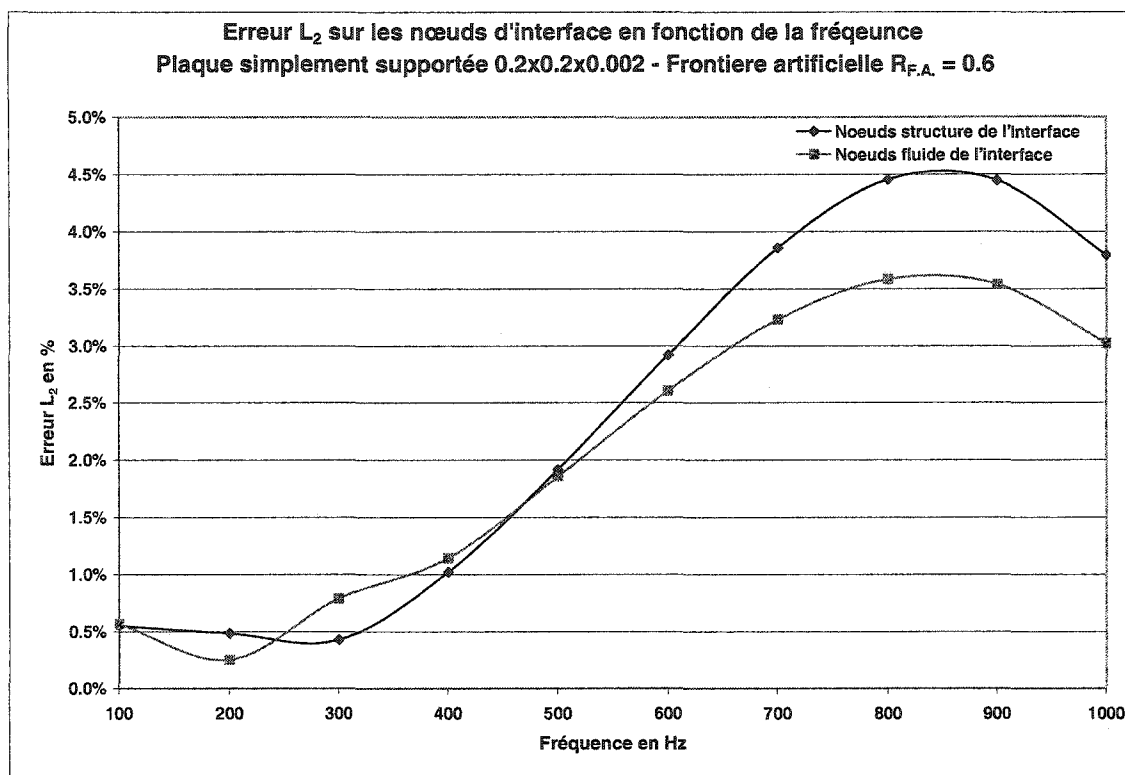


Figure 44 Erreur  $L_2$  sur le déplacement  $w$  pour  $R_{FA}=0.6$

#### 8.4.2 Nœuds du domaine fluide

Nous présentons ici, pour l'emplacement  $R_{FA}=0.6$ , quelques résultats numériques en fonction du nombre adimensionnel  $\lambda/l$  (Fig. II.6) à savoir :

- › le niveau de puissance acoustique,
- › le facteur de puissance
- › l'évolution de l'erreur  $L_2$  sur le module de la pression
- › et celle du CPU.

Les caractéristiques du maillage sont données par le tableau XXXI alors que les résultats qui s'y rapportent sont dressés dans le tableau XXXII.

Tableau XXXI

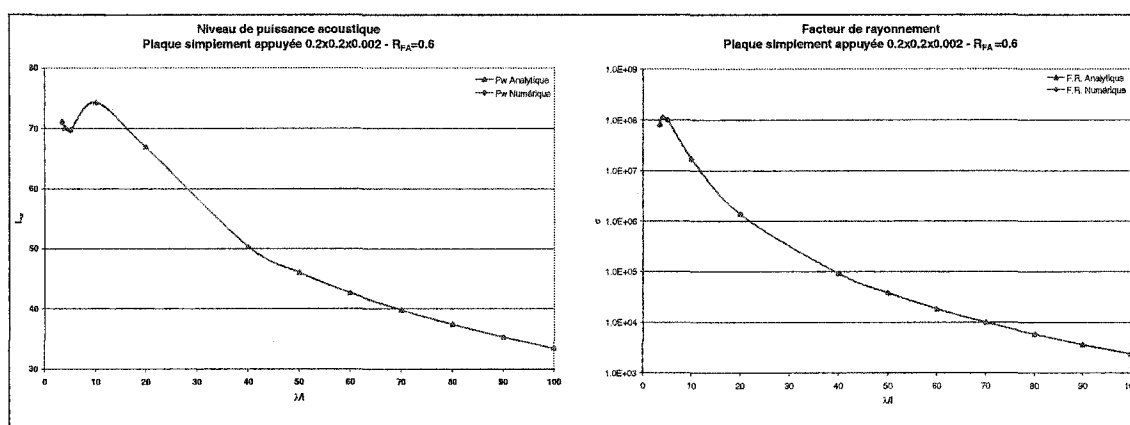
Caractéristiques du test du FA optimal  $R_{FA} = 0.6$  de la PSA

$R_{FA}$	NNT	NELT	NNI	NELI	NNFA	a
0.6	357 668	1 786 108	20 045	38 486	95 280	0.014484

Tableau XXXII

Résultats du test du FA optimal  $R_{FA} = 0.6$  de la PSA

Label	$\lambda / l$									
	100	80	60	50	40	20	10	5	4	3.4
$L_w$ Anal.	33.44	37.42	42.62	46.01	50.30	66.87	74.37	69.77	70.061	71.247
$L_w$ Numl.	33.41	37.39	42.60	45.98	50.28	66.89	74.26	69.66	70.021	70.976
$\sigma_{ray}$ Anal.	$2.387e^3$	$5.817e^3$	$1.831e^4$	$3.781e^4$	$9.162e^4$	$1.375e^6$	$1.737e^7$	$1.023e^8$	$1.127e^8$	$8.381e^7$
$\sigma_{ray}$ Num.	$2.373e^3$	$5.784e^3$	$1.820e^4$	$3.758e^4$	$9.108e^4$	$1.381e^6$	$1.692e^7$	$9.969e^7$	$1.116e^8$	$7.873e^7$
$L_2$ en %	0.505	0.516	0.538	0.557	0.587	0.759	2.777	4.023	7.533	12.807
CPU en s	223.23	224.20	332.00	342.12	337.48	345.14	437.11	658.12	698.66	671.28



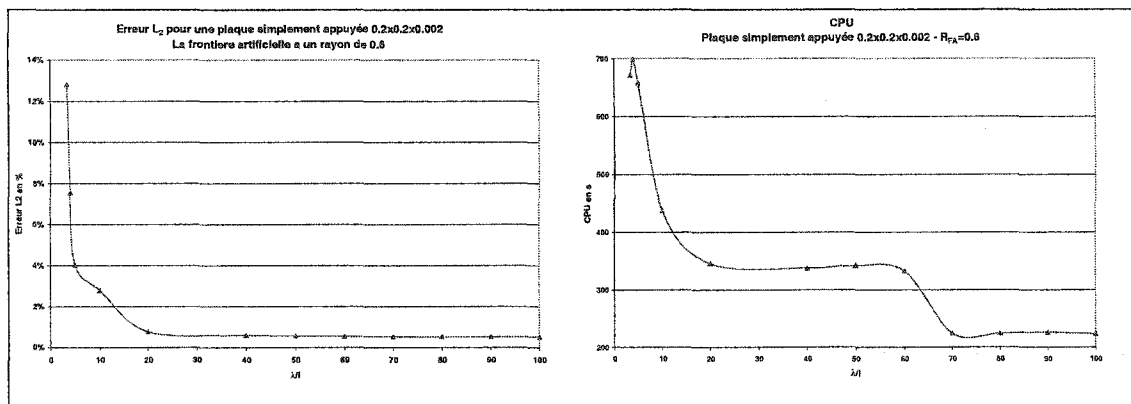


Figure 45 Tracé de  $L_w$ ,  $\sigma$ ,  $L_2$  et CPU en fonction de  $\lambda/l$  pour la PSA

Plus  $\lambda/l$  est grand (i.e plus la fréquence est petite) plus le niveau de puissance acoustique et la capacité de rayonnement sont petits, plus les résultats sont précis et le CPU est petit.

De plus la différence entre les niveaux de puissance acoustique (respectivement la capacité de rayonnement) analytique et numérique est faible.

Pour une fréquence supérieure à 1 000 Hz (i.e.  $\lambda/l = 3.4$ ) l'erreur est considérable. Le code donne une précision très appréciable pour des fréquences n'excédent pas 1 000 Hz. Pour pouvoir étaler cette plage, nous devrions mailler d'avantage le domaine fluide et surtout avoir un nombre important de nœuds fluides sur l'interface.

La visualisation des lignes de contour de la plaque pour les fréquences 100 et 500 Hz est donnée par les figures 45 et 46.

Une fois les valeurs de la pression sur la frontière artificielle sont connues nous pouvons déduire numériquement celles se trouvant hors du domaine d'étude i.e.  $r \geq R_{FA}$  par le biais de l'expansion de Atkinson-Wilcox (Voir Annexe I).

## 8.5 Conclusion

Les résultats numériques obtenus montrent l'influence de l'emplacement sur la précision de la solution. Ils montrent, en particulier, que la condition de Bayliss-Gunburger-Turkel d'ordre 2 donne d'excellents résultats pour une frontière artificielle proche du corps rayonnant d'un ratio de trois fois la caractéristiques principale de la plaque, et ceci même pour une faible résolution (Test5 tableau XXVII).

La précision des résultats dépend aussi du nombre de nœuds fluides de l'interface. Plus ce nombre est élevé plus la précision est bonne. Par contre, le nombre de nœuds structures à une faible influence sur la précision.

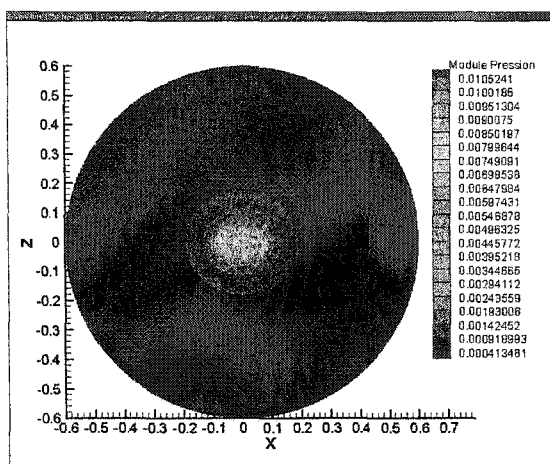
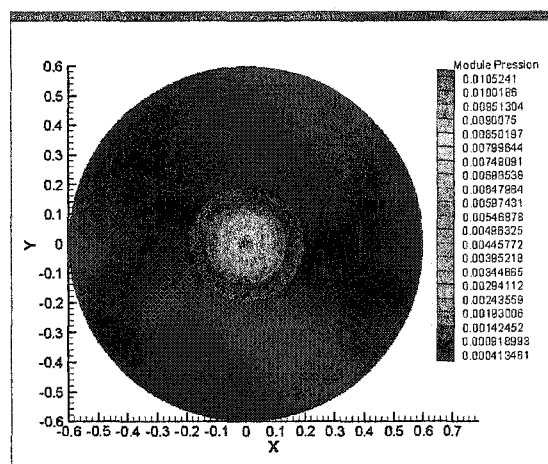
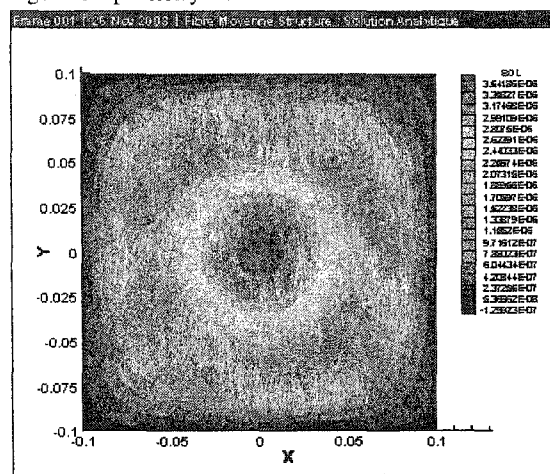
Fig.a : Coupe selon  $y = 0$ .Fig.b : Coupe selon  $z = 0.00101$ .

Fig.c : Déflexion analytique de la fibre moyenne de la plaque.

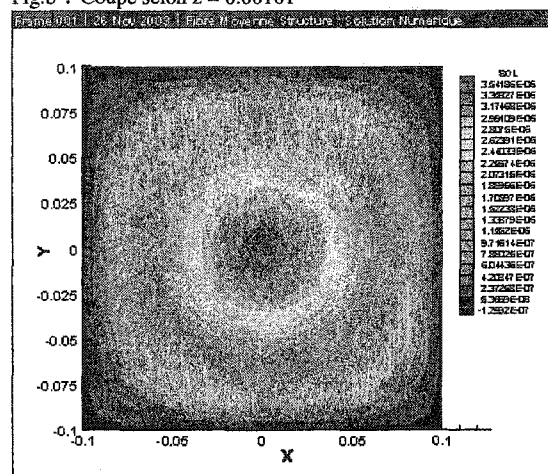


Fig.d : Déflexion numérique de la fibre moyenne de la plaque.

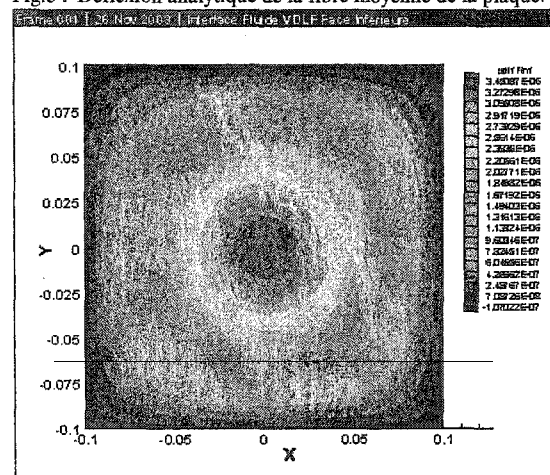


Fig.e : Déflexion numérique de la fibre inférieure de la plaque.

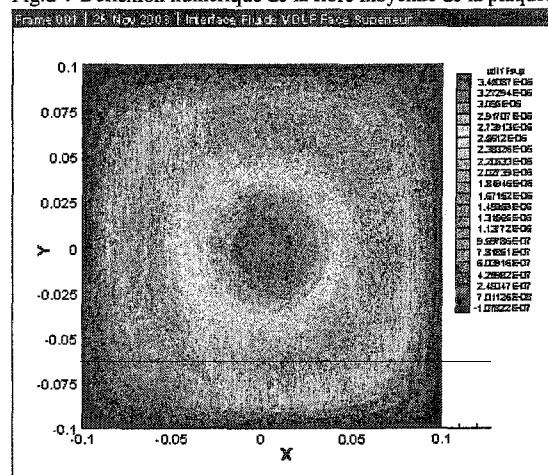


Fig.f : Déflexion numérique de la fibre supérieure de la plaque.

Figure 46 Lignes de contour décrivant la réponse à une fréquence de 100 Hz

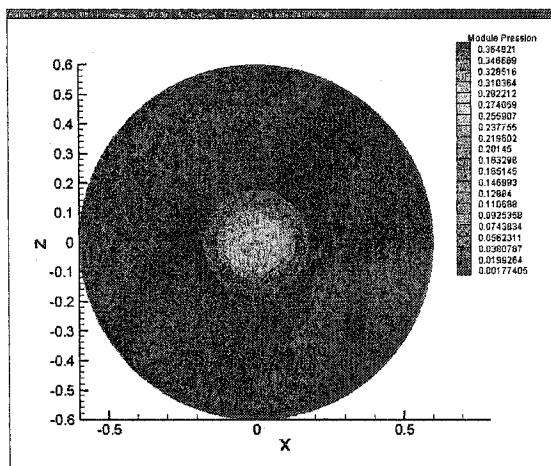
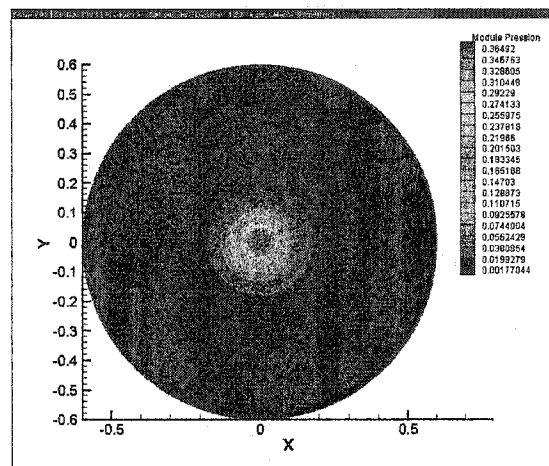
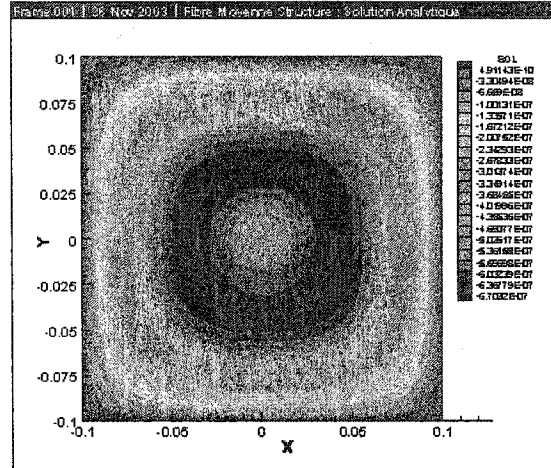
Fig.a : Coupe selon  $y = 0$ .Fig.b : Coupe selon  $z = 0.00101$ 

Fig.c : Déflexion analytique de la fibre moyenne de la plaque.

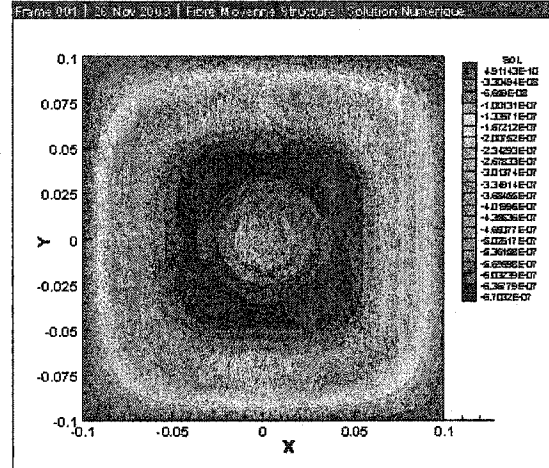


Fig.d : Déflexion numérique de la fibre moyenne de la plaque.

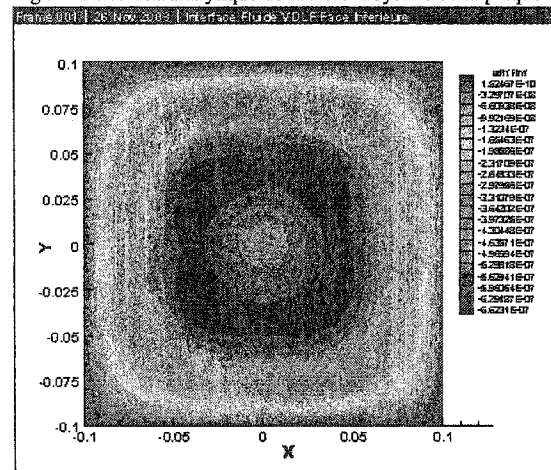


Fig.e : Déflexion numérique de la fibre inférieure de la plaque.

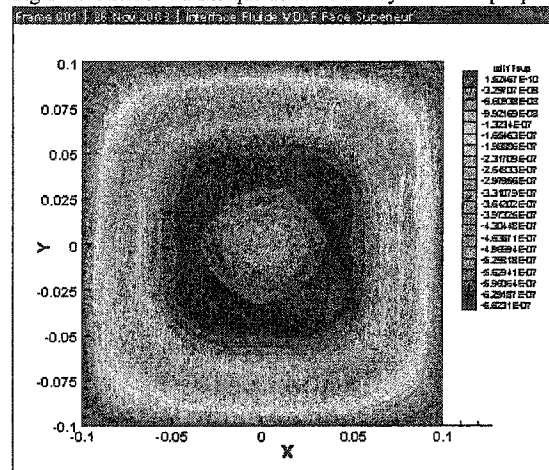


Fig.f : Déflexion numérique de la fibre supérieure de la plaque.

Figure 47 Lignes de contour décrivant la réponse à une fréquence de 500 Hz

## CONCLUSION GÉNÉRALE

Nous avons présenté et implémenté dans ce mémoire une nouvelle technique pour la résolution du problème de Helmholtz extérieur en 3D par la méthode des éléments finis. Il s'agit de la condition DtN appliquée sur une frontière artificielle qui remplace la condition de rayonnement de Sommerfeld.

Nous avons appliqué une méthode d'éléments finis stabilisée utilisant des approximations linéaires sur des tétraèdres, ce qui permet une grande flexibilité des maillages non structurés, la résolution de problèmes internes et externes, la résolution de problèmes d'interaction fluide-structure et la résolution pour des nombres d'ondes variables dans l'espace (chose qui est difficile pour les méthodes intégrales). Ceci a pu être réalisé grâce à trois outils :

- ♦ La méthode DtN qui remplace la condition de rayonnement à l'infini,
- ♦ L'algorithme itératif, pour les systèmes en nombres complexes, GMRES et le préconditionneur ILUT stabilisé,
- ♦ La formulation d'éléments finis Galerkin de moindres carrés GLS.

C'est ainsi qu'on a pu traité numériquement le problème de rayonnement 3D de structures rigides et élastiques.

Pour le premier cas de tests, nous avons constaté que la précision dépend de la résolution du maillage du domaine fluide et de l'emplacement de la frontière artificielle. Plus cette frontière est proche de l'objet rayonnant plus la précision est meilleure et ce même pour une faible résolution du maillage.

Par contre, pour le deuxième cas de test, qui concerne le rayonnement d'une plaque élastique simplement appuyée, nous avons déduit les mêmes constations mais aussi nous



avons noté une dépendance étroite de la précision du nombre de nœuds fluides à l'interface fluide-structure.

Pour les deux catégories de tests, les résultats numériques obtenus montrent que la condition de Bayliss-Gunburger-Turkel d'ordre 2 donne d'excellents résultats pour une frontière artificielle proche de l'obstacle. Une distance de l'ordre de deux fois la caractéristique principale de l'objet est recommandée.

Des travaux futurs sont, par conséquent, recommandés dans le but de mieux maîtriser la technique DtN. Ces travaux doivent être orientés essentiellement vers l'élargissement de la plage de fréquence ; ceci peut être réalisé en :

- ♦ implémentant de nouvelles conditions à imposer sur la frontière artificielle.
- ♦ utilisant des maillages adaptatifs.
- ♦ modifiant le code pour traiter des problèmes de propagation acoustique sur des champs d'écoulement fluide non constant (aéroacoustique).

Nous invitons aussi le groupe GRANIT à investir dans la validation et la comparaison du code *Helmholtz 3D* et *Rayonnement* par rapport aux résultats expérimentaux et aux résultats donnés par les codes commerciaux basés sur la BEM pour les mêmes cas traités dans ce mémoire.

**ANNEXE 1**  
**CONDITION DE RAYONNEMENT DE SOMMERFELD**

## CONDITION DE RAYONNEMENT DE SOMMERFELD

### 1.1 Fonction de Green et son application à l'équation de Helmholtz

Les fonctions de Green jouent un rôle important dans la solution des équations ordinaires et partielles linéaires, et représentent une composante clé pour l'élaboration des méthodes des équations intégrales de frontière.

Considérons une équation linéaire écrite sous la forme générale :

$$L(\mathbf{x}) u(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) \quad (\text{A.1.1})$$

où  $L(\mathbf{x})$  est un opérateur différentiel linéaire auto-adjoint,  $u(\mathbf{x})$  est la fonction inconnue, et  $f(\mathbf{x})$  est une fonction non homogène connue.

Une solution à l'équation (1) peut être écrite comme suit :

$$u(\mathbf{x}) = L^{-1}(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}) \quad (\text{A.1.2})$$

où  $L^{-1}(\mathbf{x})$  est l'opérateur différentiel inverse de  $L(\mathbf{x})$ . Et Comme  $L(\mathbf{x})$  est un opérateur différentiel, on s'attend à ce que son inverse soit un opérateur intégral et que la propriété (A.1.3) ci-après tienne :

$$L L^{-1} = L^{-1} L = I \quad (\text{A.1.3})$$

avec  $I$  est l'opérateur d'identité. Plus spécifiquement, nous définissons l'opérateur inverse comme :

$$L^{-1} f = \int G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') f(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' \quad (\text{A.1.4})$$

où  $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$  est la fonction de Green liée à l'opérateur différentiel  $L$ . Notons que  $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$  est une fonction de deux points qui dépend de  $\mathbf{x}$  et de  $\mathbf{x}'$ . Pour compléter l'idée de l'opérateur inverse  $L^{-1}$ , nous présentons la fonction delta de Dirac en tant qu'opérateur identité  $I$ .

Les propriétés de la fonction delta de Dirac  $\delta(\mathbf{x})$  sont :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}') f(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' = f(\mathbf{x}) \quad (\text{A.1.5})$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' = 1 \quad (\text{A.1.6})$$

La fonction de Green  $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$  satisfait à :

$$L(\mathbf{x}) G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (\text{A.1.7})$$

La solution de l'équation (A.1.1) peut alors être écrite directement en terme de la fonction de Green :

$$u(\mathbf{x}) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') f(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' \quad (\text{A.1.8})$$

Pour montrer que l'équation (A.1.7) est en effet une solution à l'équation (A.1.1), substituons (A.1.1) dans (A.1.7) :

$$\begin{aligned} L u(\mathbf{x}) &\stackrel{(8)}{=} L \int_{-\infty}^{+\infty} G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') f(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' \\ &\stackrel{\substack{L \\ \text{indépendant} \\ \text{de } \mathbf{x}'}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} L G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') f(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' \\ &\stackrel{(7)}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\mathbf{x}, \mathbf{x}') f(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' \\ &\stackrel{(5)}{=} f(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (\text{A.1.9})$$

D'un point de vue physique, nous savons que la fonction de Green donne le potentiel au point  $\mathbf{x}$  dû à une charge au point  $\mathbf{x}'$  dit point de source (observation). Cette fonction dépend uniquement de la distance entre la source et les points de champ. D'autres interprétations physiques de la fonction de Green peuvent également être faites. Pour les solides élastiques, la fonction de Green représente le déplacement dans le solide dû à l'application d'une force égale à l'unité. Dans le cas du transfert thermique, la fonction de Green représente la température au point champ observation due à une source de chaleur d'une unité appliquée au point de source.

Jusqu'à présent aucune mention n'a été faite des conditions de frontière pour le problème posé. Nous cherchons une solution particulière à l'équation (A.1.7). La solution particulière est, naturellement, indépendante de toutes les conditions de frontière du problème. Cependant, nous pouvons toujours ajouter les solutions homogènes à la fonction de Green :

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = G_0(\mathbf{x} - \mathbf{x}') + G_R(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \quad (\text{A.1.10a})$$

$$\begin{aligned} L(\mathbf{x}) G_R(\mathbf{x}, \mathbf{x}') &= 0 \\ L(\mathbf{x}) G_0(\mathbf{x} - \mathbf{x}') &= \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \end{aligned} \quad (\text{A.1.10b})$$

$G_0$  est la solution particulière. Elle est appelée fonction d'espace libre de Green et est désignée également sous le nom de la solution fondamentale pour l'opérateur différentiel  $L(\mathbf{x})$ .

À noter que la fonction d'espace libre de Green est singulière et la solution homogène  $G_R$  est non singulière. Puisque  $G_R$  est une solution homogène, elle contiendra des constantes, qui peuvent être évaluées pour satisfaire toutes les conditions de frontière du problème.

Nous nommons les fonctions complètes de Green  $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$  les fonctions à région-dépendante, puisqu'en général, elles contiennent non seulement la solution, mais également les limites nécessaires pour satisfaire toutes les conditions de frontière du problème.

Comme exemple, nous considérons l'équation de Helmholtz en 3D :

$$-(\Delta + k^2) \mathbf{u} = 0 \quad (\text{A.1.11})$$

Où  $\Delta$  est l'opérateur de Laplace .

Dans ce cas-ci nous cherchons la fonction de Green :

$$L(\mathbf{x}) G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = -\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (\text{A.1.12})$$

Notons qu'en 3D la fonction delta de Dirac est simplement une représentation compacte des produits des fonctions delta pour chaque coordonnée :

$$\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \delta(x_1 - x'_1) \delta(x_2 - x'_2) \delta(x_3 - x'_3) \quad (\text{A.1.13})$$

Pour obtenir la fonction de l'espace libre de Green pour ce problème, nous emploierons la méthode de transformée de Fourier. Nous utilisons aussi le changement de variable  $\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{x}'$ .

Nous rappellerons que la fonction de Green dépend uniquement de la distance relative entre les points source et champ d'observation et non de leurs positions absolues.

La transformée de Fourier et son transformée inverse sont données par :

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{s}) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{u}(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{s}\cdot\mathbf{r}} d\mathbf{r} \\ \mathbf{u}(\mathbf{r}) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{s}) e^{i\mathbf{s}\cdot\mathbf{r}} d\mathbf{s} \end{aligned} \quad (\text{A.1.14})$$

La transformée de (A.1.12) est alors :

$$\begin{aligned} \overbrace{\mathbf{L}(\mathbf{x}) \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = -\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}^{\text{Chg. var.}} &\stackrel{r=\mathbf{x}-\mathbf{x}'}{\Leftrightarrow} \overbrace{\mathbf{L}(\mathbf{r}) \mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{x}') = -\delta(\mathbf{r})}^{\text{Chg. var.}} \\ &\stackrel{G(\mathbf{r}, \mathbf{x}')=G(\mathbf{r})}{\Leftrightarrow} \overbrace{(\Delta + k^2)(\mathbf{r}) \mathbf{G}(\mathbf{r}) = -\delta(\mathbf{r})}^{\text{Chg. var.}} \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{+\infty} (\Delta + k^2)(\mathbf{r}) \mathbf{G}(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{s}\cdot\mathbf{r}} d\mathbf{r} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{+\infty} -\delta(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{s}\cdot\mathbf{r}} d\mathbf{r} \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{(2\pi)^3} \left[ (is_1)^2 + (is_2)^2 + (is_3)^2 + k^2 \right] \\ &\quad \times \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{G}(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{s}\cdot\mathbf{r}} d\mathbf{r} = - \frac{e^{-i\mathbf{s}\cdot\mathbf{0}}}{(2\pi)^3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\widehat{L(x) G(x, x')} = \widehat{-\delta(x - x')} &\Leftrightarrow [s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 - k^2] \hat{G}(r) = \frac{1}{(2\pi)^3} \\
&\Leftrightarrow (|s|^2 - k^2) G(s) = \frac{1}{(2\pi)^3} \\
&\Leftrightarrow G(s) = \frac{1}{(2\pi)^3 (|s|^2 - k^2)}
\end{aligned} \tag{A.1.15}$$

Dans l'espace physique la fonction de Green est alors donnée par la transformée inverse de  $G(s)$  :

$$\begin{aligned}
G(r) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(2\pi)^3 (|s|^2 - k^2)} e^{is \cdot r} dr \\
&= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|s|^2 - k^2} e^{is \cdot r} dr
\end{aligned} \tag{A.1.16}$$

L'intégrale de Fourier est isotrope puisqu'elle dépend uniquement de l'amplitude de  $s$ , que nous dénotons  $s$ , et non de sa direction. [35] donne le résultat général pour des intégrales de Fourier isotropes en 3D :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(s) e^{is \cdot r} ds = \frac{4\pi}{|r|} \int_0^{+\infty} s^2 f(s) \sin(s|r|) ds \tag{A.1.17}$$

Utilisant ce résultat, la transformée inverse que nous cherchons est alors :

$$\begin{aligned}
G(r) &= \frac{4\pi}{(2\pi)^3} \frac{1}{|r|} \int_0^{+\infty} \frac{s}{s^2 - k^2} \sin(s|r|) ds \\
&= \frac{4\pi}{(2\pi)^3} \frac{1}{2|r|} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{s}{s^2 - k^2} \sin(s|r|) ds \\
&= \frac{2\pi}{(2\pi)^3} \frac{1}{|r|} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{s}{s^2 - k^2} \frac{e^{is|r|} - e^{-is|r|}}{2i} ds \\
&= \frac{2\pi}{(2\pi)^3} \frac{1}{2i|r|} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{s e^{is|r|}}{s^2 - k^2} - \frac{s e^{-is|r|}}{s^2 - k^2} \right) ds \\
&= \frac{\pi}{(2\pi)^3} \frac{1}{i|r|} \{I_1 - I_2\}
\end{aligned} \tag{A.1.18}$$

La première intégrale sera évaluée en considérant un découpage dans le plan complexe de  $s$ . Puisque le dénominateur de la fonction à intégrer a des pôles sur l'axe des réelles, nous introduisons une petite partie imaginaire pour excentrer les pôles de l'axe des réelles de  $s$ .

$$I_1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{s e^{is|r|}}{(s - (k + i\varepsilon))(s + (k + i\varepsilon))} ds \quad (\text{A.1.19})$$

Nous effectuons une découpe dans la moitié supérieure du plan complexe. Ce choix résulte du comportement du numérateur de la fonction à intégrer lorsque  $s$  devient grand. En utilisant la théorie d'intégration par des résidus nous aurons alors :

$$I_1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( 2\pi i \sum_{\substack{\text{Re}(s) > 0 \\ \text{Im}(s) > 0}} \frac{s e^{is|r|}}{(s - (k + i\varepsilon))(s + (k + i\varepsilon))} \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \pi i e^{i(k+i\varepsilon)|r|} \right) = \pi i e^{ik|r|} \quad (\text{A.1.20})$$

De même pour  $I_2$ , nous établissons une découpe dans la moitié inférieure du plan complexe. Nous obtenons :

$$I_2 = -\pi i e^{ik|r|} \quad (\text{A.1.21})$$

La fonction de Green est alors :

$$G(\mathbf{r}) = \frac{\pi}{(2\pi)^3} \frac{1}{i|\mathbf{r}|} \left\{ \pi i e^{ik|\mathbf{r}|} + \pi i e^{ik|\mathbf{r}|} \right\} = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ik|\mathbf{r}|}}{|\mathbf{r}|} \quad (\text{A.1.22})$$

ou encore :

$$G(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ik|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \quad (\text{A.1.23})$$



## 1.2 Représentation de Kirchhoff - Helmholtz

Supposons que nous avons à résoudre l'équation de Helmholtz :

$$(\Delta_x + k^2) u = f(x) \quad (\text{A.1.24})$$

La fonction de Green correspondante est :

$$(\Delta_x + k^2) G = \delta(x-y) \quad (\text{A.1.25})$$

L'expression de la solution est :

$$u(x) = \int f(y) G(x,y) dy \quad (\text{A.1.26})$$

Pour traiter le problème où les frontières sont présentes, il est commode d'adopter un point de vue plus général. Supposons qu'on considère le point  $x$  comme fixe et  $y$  comme variable dans l'équation (A.1.25). La fonction de Green satisfait l'équation :

$$(\Delta_y + k^2) G(x,y) = \left( \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_3^2} + k^2 \right) G(x,y) = \delta(x-y) \quad (\text{A.1.27})$$

Nous écrivons donc (A.1.1) et (A.1.3) comme suit :

$$(\Delta_y + k^2) u = f(y) \quad (\text{A.1.28})$$

$x$  est prise à la frontière du domaine  $\Omega$  et  $y$  représente l'espace où nous voulons évaluer la solution  $u(y \in \Omega^+)$ .

Supposons que  $G(x,y)$  est une solution de l'équation (A.1.5). Multiplions les équations (A.1.4) et (A.1.5) respectivement par  $u(y)$  et  $G(x,y)$  puis soustrayons les résultats obtenus. Nous aurons alors :

$$\begin{aligned} & \left| \begin{aligned} (\Delta_y + k^2) u(y) G(x,y) &= f(y) G(x,y) \\ (\Delta_y + k^2) G(x,y) u(y) &= \delta(x,y) u(y) \end{aligned} \right. \quad (\text{A.1.29}) \\ & \Rightarrow G \Delta_y u(y) - u(y) \Delta_y G = f(y) G - \delta(x,y) u(y) \end{aligned}$$

Si nous intégrons maintenant sur le domaine  $\Omega$  nous obtenons :

$$\int_{\Omega} \left( \mathbf{G} \Delta_{\mathbf{y}} \mathbf{u}(\mathbf{y}) - \mathbf{u}(\mathbf{y}) \Delta_{\mathbf{y}} \mathbf{G} \right) d\Omega(\mathbf{y}) = \int_{\Omega} \mathbf{f}(\mathbf{y}) \mathbf{G} dV(\mathbf{y}) - \int_V \delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathbf{u}(\mathbf{y}) d\Omega(\mathbf{y}) \quad (\text{A.1.30})$$

En utilisant le théorème de Green et les propriétés de la fonction delta de Dirac il vient :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{x}) &= \int_{\Omega} \mathbf{f}(\mathbf{y}) \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\Omega(\mathbf{y}) - \int_{\partial\Omega} \left( \mathbf{u}(\mathbf{y}) \nabla_{\mathbf{y}} \mathbf{G} \cdot \mathbf{n} - \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \nabla_{\mathbf{y}} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \right) dS(\mathbf{y}) \\ &= \int_{\Omega} \mathbf{f}(\mathbf{y}) \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\Omega(\mathbf{y}) - \int_{\partial\Omega} \left( \mathbf{u}(\mathbf{y}) \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{y}) \right) dS(\mathbf{y}) \end{aligned} \quad (\text{A.1.31})$$

Cette dernière équation est dénommée représentation de Kirchhoff-Helmholtz.

### 1.3 Condition de rayonnement de Sommerfeld

Considérons la propagation d'onde dans un espace libre (ou domaine acoustique non-borné). Nous supposons qu'aucune onde n'est réfléchi depuis l'infini. L'expression de cette condition est obtenue mathématiquement de l'intégral de l'équation de Helmholtz.

Soit  $u(\mathbf{r})$  la solution de l'équation homogène de Helmholtz dans un domaine extérieur  $\Omega^+ = \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}$ :

$$(\Delta_{\mathbf{x}} + k^2) u = 0 \quad (\text{A.1.32})$$

et  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  la fonction de green correspondante donnée par :

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = G(|\mathbf{r}, \mathbf{r}'|) = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \quad (\text{A.1.33})$$

Cette fonction est définie partout dans  $\Omega^+$  reliant un point d'observation  $\mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3)$  à un point source  $\mathbf{r}' = (x_1', x_2', x_3')$ .

Quelque soit  $\mathbf{r}$  de  $\Omega^+$ ,  $u(\mathbf{r})$  satisfait à l'équation de Kirchhoff-Helmholtz (A.1.31).

$$u(\mathbf{r}) = \int_{\partial\Omega} \left( u(\mathbf{r}') \frac{\partial G}{\partial n}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial u}{\partial n}(\mathbf{r}') \right) dS(\mathbf{r}') \quad (\text{A.1.34})$$

Nous allons tronquer le domaine  $\Omega^+$  par une frontière fictive de forme sphérique  $S_R$  enfermant le domaine  $\Omega$  et ayant un très grand rayon  $R$ . Le domaine complet  $\Omega^+$  sera couvert par la sphère  $S_R$  en faisant tendre  $R$  vers l'infini.

Dans ces conditions :

$$\partial\Omega^+ = \partial\Omega \cup S_R \quad (\text{A.1.35})$$

On souhaite avoir :

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{S_R} \left( u(\mathbf{r}') \frac{\partial G}{\partial n}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial u}{\partial n}(\mathbf{r}') \right) dS(\mathbf{r}') = 0 \quad (\text{A.1.36})$$

Pour un  $\mathbf{r}$  fixe et appartenant à  $\Omega^+$  nous supposons que la sphère est suffisamment grande pour que la relation suivante tienne :

$$R = |\mathbf{r}' - \mathbf{r}| \approx |\mathbf{r}'| \quad (\text{A.1.37})$$

et que la dérivée normale  $\partial/\partial n$  peut être confondue avec  $\partial/\partial R$ .

$$\frac{\partial}{\partial n} \approx \frac{\partial}{\partial R} \quad (\text{A.1.38})$$

Ainsi nous obtenons :

$$\begin{aligned}
& \int_{S_R} \left[ u(\mathbf{r}') \frac{\partial \left( \frac{e^{ik|\mathbf{r}'-\mathbf{r}|}}{4\pi|\mathbf{r}'-\mathbf{r}|} \right)}{\partial n}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - \frac{e^{ik|\mathbf{r}'-\mathbf{r}|}}{4\pi|\mathbf{r}'-\mathbf{r}|} \frac{\partial u}{\partial n}(\mathbf{r}') \right] dS(\mathbf{r}') \\
&= \int_{S_R} \left[ u(R) \frac{\partial \left( \frac{e^{ikR}}{4\pi R} \right)}{\partial R} - \frac{e^{ikR}}{4\pi R} \frac{\partial u}{\partial R}(R) \right] dS \\
&= \int_{S_R} \left[ iku - \frac{u}{R} - \frac{du}{dR} \right] \frac{e^{ikR}}{4\pi} dS
\end{aligned} \tag{A.1.39}$$

Pour que  $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{S_R} \frac{1}{R} \left( iku - \frac{u}{R} - \frac{du}{dR} \right) \frac{e^{ikR}}{4\pi} dS = 0$  il suffit que :

$$\begin{cases} \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\left( iku - \frac{du}{dR} \right)}{R} = 0 \\ \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\frac{u}{R}}{R} = 0 \end{cases}$$

Autrement:

$$\begin{aligned}
\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\left( iku - \frac{du}{dR} \right)}{R} = 0 &\Rightarrow iku - \frac{du}{dR} = o(R^{-1}) \\
\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\frac{u}{R}}{R} = 0 &\Rightarrow \begin{cases} \frac{u}{R} = o(R^{-1}) \\ \text{ou encore} \\ u = O(R^{-1}) \end{cases}
\end{aligned} \tag{A.1.40}$$

Notons au passage que :  $dS \approx R^2$

L'équation (A.1.35) est connue sous le nom de condition de rayonnement de Sommerfeld. La solution au problème extérieur de Helmholtz qui satisfait la condition de Sommerfeld est dénommée solution radiante.

$$\underbrace{u = O(R^{-1})}_{\text{Re présente le déclin de la solution stationnaire au champ lointain}} \quad \& \quad \underbrace{iku - \frac{du}{dR} = o(R^{-1})}_{\text{Re présente la directionnalité de la solution stationnaire au champ lointain}} \quad (\text{A.1.41})$$

On montre que si une fonction satisfait aussi bien l'équation de Helmholtz et la condition de rayonnement (équation de droite) alors elle satisfera la condition de déclin. C'est la condition de rayonnement qui est la plus usitée.

À noter qu'en 2D la fonction de Green est :

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{i H_0^{(1)}(k|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{4} \quad (\text{A.1.42})$$

Où  $H_0^{(1)}(x)$  est la fonction de Hankel cylindrique de 1<sup>er</sup> ordre (voir annexe VII). La condition de rayonnement a pour expression :

$$u = O(R^{-1/2}) \quad \text{et} \quad iku - \frac{du}{dR} = o(R^{-1/2}) \quad R \rightarrow \infty \quad (\text{A.1.43})$$

La condition de rayonnement peut se généralisée pour n dimensions (nD) à :

$$u = O(R^{-(n-1)/2}) \quad \text{et} \quad iku - \frac{du}{dR} = o(R^{-(n-1)/2}) \quad R \rightarrow \infty \quad (\text{A.1.44})$$

#### 1.4 Champ lointain

L'équation intégrale de Helmholtz peut être utilisée pour calculer le champ lointain de la solution rayonnée.

Le rayon  $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$  peut être approximé par  $r = |\mathbf{r}| \gg |\mathbf{r}'| = r'$

$$\begin{aligned}
(\mathbf{r}-\mathbf{r}')^2 = R^2 &\Leftrightarrow R^2 = r^2 + r'^2 - 2|\mathbf{r}||\mathbf{r}'|\cos(\mathbf{r},\mathbf{r}') \\
&\Leftrightarrow R = \left( |\mathbf{r}|^2 + |\mathbf{r}'|^2 - 2|\mathbf{r}||\mathbf{r}'|\cos(\mathbf{r},\mathbf{r}') \right)^{1/2} \\
&\Leftrightarrow R = \left( r^2 + r'^2 - 2r r' \cos(\mathbf{r},\mathbf{r}') \right)^{1/2} \\
&\Leftrightarrow R = r \left( 1 + \left( \frac{r'}{r} \right)^2 - 2 \frac{r'}{r} \cos(\mathbf{r},\mathbf{r}') \right)^{1/2} \\
&\stackrel{\frac{r'}{r} \ll 1}{\Rightarrow} R \cong r \left( 1 - 2 \frac{r'}{r} \cos(\mathbf{r},\mathbf{r}') \right)^{1/2} \\
&\stackrel{\text{Développement en série de Taylor de } (1-x)^{1/2} \text{ au voisinage de zéro}}{\Rightarrow} R \cong r \left[ 1 - \frac{1}{2} \left( 2 \frac{r'}{r} \cos(\mathbf{r},\mathbf{r}') \right) \right] \\
&\Rightarrow R \cong r \left[ 1 - \frac{r'}{r} \cos(\mathbf{r},\mathbf{r}') \right] \\
&\Rightarrow R \cong r - \frac{r r' \cos(\mathbf{r},\mathbf{r}')}{r} \\
&\Rightarrow R \cong r - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r}
\end{aligned} \tag{A.1.45}$$

En insérant cette approximation dans (A.1.33), nous obtenons :

$$\begin{aligned}
G(\mathbf{r},\mathbf{r}') &= \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \\
&\cong \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ik\left(r - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r}\right)}}{|\mathbf{r}|} \\
&\cong \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ikr} e^{-ik \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r}}}{r} \\
&\cong \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} e^{-ik \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r}}
\end{aligned} \tag{A.1.46}$$

Dans le cas où  $\mathbf{r}'$  se trouve sur la sphère unité  $S_0$ , alors  $\mathbf{r}' = \mathbf{n}'$  et l'équation (A.1.46) donne l'expression de l'équation asymptotique :

$$G(\mathbf{r},\mathbf{n}') \cong \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} e^{-ik \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r}} \stackrel{\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{r}}{\cong} \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} e^{-ik \mathbf{n} \cdot \mathbf{n}'} \tag{A.1.47}$$

Sachant que pour un champ lointain, l'expansion de l'expression de Atkinson-Wilcox conduit à l'équation asymptotique suivante :

$$u(\mathbf{r}) \underset{r \rightarrow \infty}{\cong} \frac{e^{ikr}}{r} F(\theta, \phi) \underset{r \rightarrow \infty}{\cong} \frac{e^{ikr}}{r} F\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right) \quad (\text{A.1.48})$$

Introduisons l'équation (A.1.47) dans l'équation intégrale de Helmholtz (A.1.34) nous obtenons :

$$\begin{aligned} F\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right) \underset{r \rightarrow \infty}{\cong} r e^{-ikr} \int_{S_0} \left( u(\mathbf{n}') \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{n}')}{\partial n'} - G(\mathbf{r}, \mathbf{n}') \frac{\partial u(\mathbf{n}')}{\partial n'} \right) dS \\ \underset{r \rightarrow \infty}{\cong} r e^{-ikr} \int_{S_0} \left( u(\mathbf{n}') \frac{\partial}{\partial n'} \left( \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} e^{-ik\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}'} \right) \right. \\ \left. - \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} e^{-ik\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}'} \frac{\partial u(\mathbf{n}')}{\partial n'} \right) dS \end{aligned} \quad (\text{A.1.49})$$

Le calcul de la première dérivée est le suivant :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial n'} \left( \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} e^{-ik\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}'} \right) \overset{\nabla \cdot \mathbf{n} = \frac{\partial}{\partial n}}{=} \frac{\partial}{\partial r'} \left( \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} e^{-ik \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r}} \right) \cdot \mathbf{n}' \\ = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \left( -ik \frac{\mathbf{r}}{r} e^{-ik \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r}} \right) \cdot \mathbf{n}' \\ \overset{\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{r}}{=} \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \left( -ik \mathbf{n} e^{-ik\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}'} \right) \cdot \mathbf{n}' \\ = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} (-ik\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}') e^{-ik\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}'} \end{aligned} \quad (\text{A.1.50})$$

En remplaçant (A.1.50) dans (A.1.49) nous obtenons l'expression du champ lointain :

$$\begin{aligned} F\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right) \underset{r \rightarrow \infty}{\cong} r e^{-ikr} \int_{S_0} \left( u(\mathbf{n}') \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} (-ik\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}') e^{-ik\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}'} - \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} e^{-ik\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}'} \frac{\partial u(\mathbf{n}')}{\partial n'} \right) dS \\ \underset{r \rightarrow \infty}{\cong} -\frac{1}{4\pi} \int_{S_0} \left( ik(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}') u(\mathbf{n}') + \frac{\partial u(\mathbf{n}')}{\partial n'} \right) e^{-ik\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}'} dS \end{aligned} \quad (\text{A.1.51})$$

## **ANNEXE 2**

### **FORME BILINEARE**



## FORME BILINEAIRE

Soit : 
$$B(p, q) - \ell(q) = 0 \quad \forall q \in K \quad (A.2.1)$$

avec 
$$\left. \begin{aligned} B(p, q) &= \int_{\Omega} (k^2 q \cdot p - \nabla q \nabla p) d\Omega + \int_{\Gamma_3} q (ik\beta p) d\Gamma_3 \\ \ell(q) &= \int_{\Gamma_2} q (\rho_0 c^2 k^2 \bar{u}) d\Gamma_2 \end{aligned} \right\} \quad \forall q \in K \quad (A.2.2)$$

De sa définition,  $\ell$  est linéaire.

Montrons que  $B$  est bilinéaire et symétrique :

Preuve :

$$\begin{aligned} B(ap+bq, r) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} (k^2 r \cdot (ap+bq) - \nabla r \nabla (ap+bq)) d\Omega - \int_{\Gamma_3} r (ik\beta (ap+bq)) d\Gamma_3 \\ &= a \left( \frac{1}{2} \int_{\Omega} (k^2 r \cdot p - \nabla r \nabla p) d\Omega - \int_{\Gamma_3} r (ik\beta p) d\Gamma_3 \right) \\ &\quad + b \left( \frac{1}{2} \int_{\Omega} (k^2 r \cdot q - \nabla r \nabla q) d\Omega - \int_{\Gamma_3} r (ik\beta q) d\Gamma_3 \right) \\ &= a B(p, r) + b B(q, r) \end{aligned} \quad (A.2.3)$$

Et,

$$\begin{aligned} B(q, p) &= \int_{\Omega} (k^2 p \cdot q - \nabla p \nabla q) d\Omega - \int_{\Gamma_3} p (ik\beta q) d\Gamma_3 \\ &= \int_{\Omega} (k^2 p \cdot q - \nabla p \nabla q) d\Omega - \int_{\Gamma_3} q (ik\beta p) d\Gamma_3 \\ &= B(p, q) \end{aligned} \quad (A.2.4)$$

Le principe variationnel correspondant aux conditions originales du problème est donné par :

$$\delta I = 0 \quad \text{avec } p = \bar{p} \text{ sur } \Gamma_1 \quad (A.2.5)$$

où  $I$  est la fonctionnelle du problème :

$$I(p) = \frac{1}{2} B(p, p) - \ell(p) \quad (A.2.6)$$

En effet :

$$\begin{aligned} \delta I &= I(p + \delta p) - I(p) \\ &= \frac{1}{2} B(p + \delta p, p + \delta p) - \ell(p + \delta p) - \left( \frac{1}{2} B(p, p) - \ell(p) \right) \\ &= \frac{1}{2} (B(p + \delta p, p + \delta p) - B(p, p)) - \ell(p + \delta p) + \ell(p) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta I &= \frac{1}{2} (B(p,p) + \underbrace{B(\delta p,p)}_{\text{CarBestlinéaire}} + \underbrace{B(p,\delta p)}_{\text{CarBestlinéaire}} + B(\delta p,\delta p) - B(p,p)) \\
&\quad - \underbrace{\ell(p)}_{\text{CarBestlinéaire}} - \ell(\delta p) + \ell(p) \\
&= \frac{1}{2} (B(\delta p,p) + B(p,\delta p) + \underbrace{B(\delta p,\delta p)}_{\text{négligeable}}) - \ell(\delta p) \\
&= \frac{1}{2} (B(\delta p,p) + B(p,\delta p)) - \ell(\delta p) \tag{A.2.7} \\
&= \frac{1}{2} (B(\delta p,p) + \underbrace{B(\delta p,p)}_{\text{CarBestsymétrique}}) - \ell(\delta p) \\
&= B(\delta p,p) - \ell(\delta p) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Ce qui montre (A.2.1).

### **ANNEXE 3**

#### **EXPRESSION ANALYTIQUE DU DÉPLACEMENT TRANSVERSAL D'UNE PLAQUE PLANE SIMPLEMENT APPUYÉE**

## EXPRESSION ANALYTIQUE DU DÉPLACEMENT TRANSVERSAL D'UNE PLAQUE PLANE SIMPLEMENT APPUYÉE

Considérons une plaque finie simplement appuyée sur tous ses côtés. Cette plaque est soumise à une force d'excitation en un point  $(x_0, y_0)$  (voir figure 3.1). En analyse harmonique, nous écrivons le déplacement transversal sous la forme suivante:

$$w(x, y) = w_0(x, y) e^{i\omega t}$$

L'équation du mouvement de la plaque s'écrit dans ce cas comme suit :

$$(\nabla^4 - \mu^4) w = \frac{F}{D} \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) \quad (\text{A.3.1a})$$

où :

$$D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)} \quad (\text{A.3.1b})$$

et :

$$\mu^4 = \frac{\rho h \omega^2}{D} \quad (\text{A.3.1c})$$

Les conditions aux limites sont :

$$w(x, y) = \frac{\partial w(x, y)}{\partial x^2} = \frac{\partial w(x, y)}{\partial y^2} = 0 \quad \text{pour } |x| = L_x \text{ et } |y| = L_y \quad (\text{A.3.1d})$$

Le schéma suivant illustre le cas étudié :

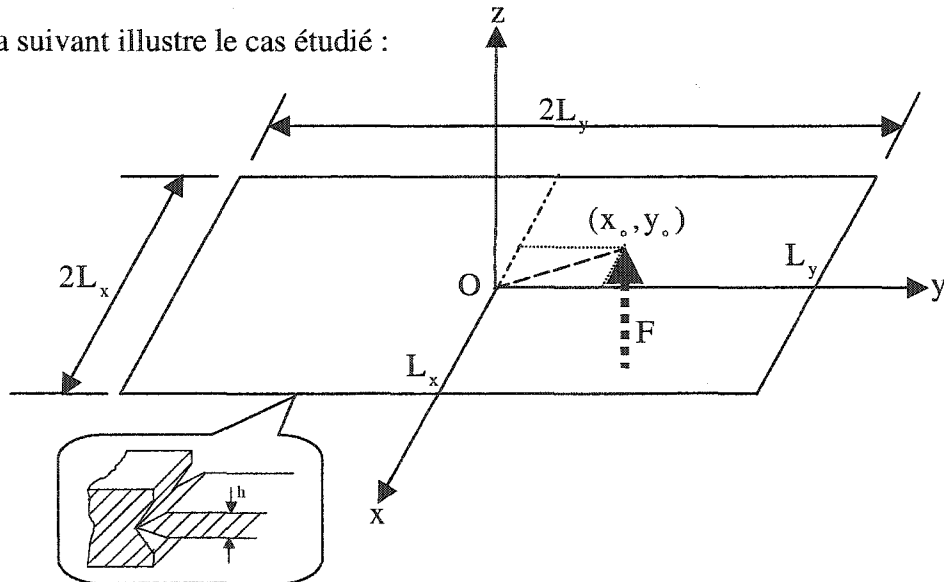


Figure. 3.1 : Représentation schématique d'une plaque rectangulaire simplement  
appuyée avec un type d'appui simple

### 3.1 Vibration libre

L'équation homogène associée à (A.3.1a) peut s'écrire comme :

$$(\nabla^2 - \mu^2)(\nabla^2 + \mu^2)w = 0 \quad (\text{A.3.2a})$$

ou encore :

$$(\nabla^2 - \mu^2)w = 0 \quad \text{et} \quad (\nabla^2 + \mu^2)w = 0 \quad (\text{A.3.2b})$$

La solution générale de (A.3.2a) s'écrit :

$$w = w_+ + w_- \quad (\text{A.3.2c})$$

où  $w_{\pm}$  sont des fonctions satisfaisant les équations :

$$(\nabla^2 \pm \mu^2)w_{\pm} = 0 \quad (\text{A.3.2c})$$

En utilisant la séparation des variables nous trouvons :

$$w_+ = A_+ e^{\pm i k_1 x} e^{\pm i k_2 y} \quad (\text{A.3.2d})$$

$$\text{et} \quad w_- = A_- e^{\pm k_1 x} e^{\pm k_2 y} \quad (\text{A.3.2e})$$

$$\text{avec :} \quad k_1^2 + k_2^2 = \mu^2 \quad (\text{A.3.2f})$$

La solution générale s'écrit sous la forme de huit produits de fonctions trigonométriques et hyperboliques :

$$\begin{aligned} w(x, y) = & A_1 \sin k_1 x \sin k_2 y + A_2 \sin k_1 x \cosh k_2 y + A_3 \cosh k_1 x \sin k_2 y \\ & + A_4 \cosh k_1 x \cosh k_2 y + A_5 \sinh k_1 x \sinh k_2 y + A_6 \sinh k_1 x \cosh k_2 y \\ & + A_7 \cosh k_1 x \sinh k_2 y + A_8 \sinh k_1 x \sinh k_2 y \end{aligned} \quad (\text{A.3.2g})$$

Les coefficients  $A_i, i \in [1, \dots, 8]$  se déterminent des conditions aux limites. Tout calcul fait, on trouve que le déplacement transversal a pour expression (superposition des fonctions propres de la vibration libre) :

$$w(x, y) = \sum_{m=0} \sum_{n=0} W_{mn} \cos k_m x \cos k_n y \quad (\text{A.3.3a})$$

avec :

$$k_m = \frac{m\pi}{2L_x} \quad \text{et} \quad k_n = \frac{n\pi}{2L_y} \quad (\text{A.3.3b})$$

$$k_m^2 + k_n^2 = \left( \frac{\rho h \omega_{mn}^2}{D} \right)^{1/2} \quad (\text{A.3.3c})$$

### 3.2 Vibration forcée

Comme on a vu à la section précédente, la fonction (A.3.5a) satisfait les conditions aux limites (A.3.1d).

$$w_{mn}(x, y) = W_{mn} \cos k_m x \cos k_n y \quad (\text{A.3.4a})$$

où  $W_{mn}$  est une inconnue à déterminer. Son expression est donnée par :

$$W_{mn} = F \frac{\cos k_m x_0 \cos k_n y_0}{DL_x L_y ((k_m^2 + k_n^2)^2 - \mu^4)} \quad (\text{A.3.4b})$$

Pour la démonstration de (A.3.4b) est donnée à l'annexe V (Solution analytique de la pression en champ lointain).

Remplaçons (A.3.4b) dans (A.3.3a), nous obtiendrons l'expression du déplacement transversal de la plaque simplement appuyée.

$$w(x, y) = F \sum_{m=0} \sum_{n=0} \frac{\cos k_m x_0 \cos k_n y_0}{DL_x L_y ((k_m^2 + k_n^2)^2 - \mu^4)} \cos k_m x \cos k_n y \quad (\text{A.3.4c})$$

sachant que :

$$DL_x L_y (k_m^2 + k_n^2)^2 = DL_x L_y \frac{\rho h \omega_{mn}^2}{D} = M_s \omega_{mn}^2 \quad (\text{A.3.5a})$$

$$\text{ou encore :} \quad DL_x L_y \mu^4 = DL_x L_y \frac{\rho h \omega^2}{D} = M_s \omega^2 \quad (\text{A.3.5b})$$

avec  $M_s = \rho L_x L_y = \rho S_s$  est la masse de la plaque et  $S_s$  sa surface latérale supérieure ou inférieure.

L'équation (A.3.4c) peut ainsi s'écrire :

$$w(x, y) = \frac{F}{M_s} \sum_{m=0} \sum_{n=0} \frac{\cos k_m x_0 \cos k_n y_0}{\omega_{mn}^2 - \omega^2} \cos k_m x \cos k_n y \quad (\text{A.3.5c})$$

### 3.3 Quelques rappels

#### a. Relation de dispersion

Pour le cas particulier d'une onde progressive harmonique suivant l'axe Oy, la solution se réduit à :

$$w(y,t) = w_0 e^{i(k_f y - \omega t)} \quad (\text{A.3.6a})$$

avec : 
$$k_f = \frac{\omega}{c_f} \quad (\text{A.3.6b})$$

En remplaçons (A.3.6a) dans (A.3.1a), nous obtenons la relation de dispersion :

$$k_f^4 - \frac{\rho h \omega^2}{D} = 0 \quad (\text{A.3.6c})$$

Nous déduisons alors l'expression de la célérité des ondes de flexion :

$$c_f = \left( \frac{D}{\rho h} \right)^{1/4} \omega^{1/2} \quad (\text{A.3.6d})$$

#### b. Condition d'appui simple :

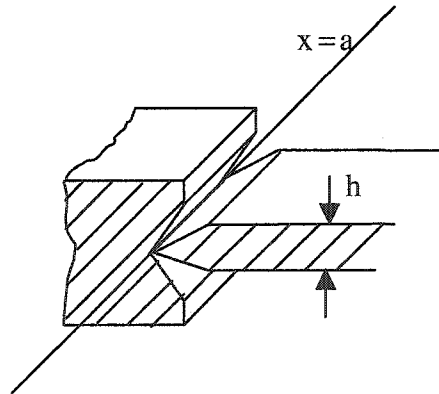


Fig. A.3.2 : Type d'appui simple

Si le côté  $x=a$  est simplement appuyé, le déplacement transversal le long de ce côté est nulle. En même temps, ce côté peut tourner librement par rapport à cette ligne ; il n'y aura pas de moment de flexion le long de ce côté.

## **ANNEXE 4**

### **FORMULE DE RAYLEIGH POUR LES SOURCES PLANES**



## FORMULE DE RAYLEIGH POUR LES SOURCES PLANES

### 4.1 L'espace libre des fonctions de Green

Le champ de pression en un point donné de l'espace peut être formulé sous forme d'une intégrale de surface formée d'une combinaison linéaire de l'accélération de la frontière radiante. Il peut aussi être formulé en terme de l'espace libre des fonctions de Green (voir annexe 3); désigné par  $g(|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|)$ .

La fonction de Green doit :

① être la solution de l'équation inhomogène de Helmholtz :

$$(\nabla^2 + k^2)g(|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|) = \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0) \quad (\text{A.4.1})$$

où la fonction de Dirac est définie dans le volume V par :

$$\begin{aligned} \int_V \phi(\mathbf{r}_0) \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0) dV(\mathbf{r}_0) &= \phi(\mathbf{r}) \quad \mathbf{r} \text{ dans } V \\ &= \frac{\phi(r)}{2} \quad \mathbf{r} \text{ sur la frontière de } V \\ &= 0 \quad \mathbf{r} \text{ à l'extérieur} \end{aligned} \quad (\text{A.4.2})$$

② satisfaire la condition de rayonnement de Sommerfeld :

$$\lim_{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0| \rightarrow \infty} |\mathbf{r}-\mathbf{r}_0| \left( \frac{\partial g}{\partial |\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} - i k g \right) = 0 \quad (\text{A.4.3})$$

Pour solutionner les équations (A.4.1) à (A.4.3), nous utilisons les coordonnées sphériques. L'origine coïncide avec la singularité de la fonction de green donnée par (A.4.1) de façon à ce que la fonction de Green satisfait l'équation homogène de Helmholtz i.e. :

$$(\nabla^2 + k^2)g(r) \stackrel{\substack{\text{En Coord. Sph.} \\ \frac{\partial g}{\partial \varphi} = \frac{\partial g}{\partial \varphi} = 0}}{=} \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + k^2 \right) g(r) = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (r g(r))}{\partial r^2} + k^2 g(r) = 0$$

$$\text{avec } r > 0 \quad (\text{A.4.4})$$

Le changement de variable  $rg(r) = f(r)$  donne :

$$f^{(2)}(r) + k^2 f(r) = 0 \quad (\text{A.4.5})$$

La solution générale de (A.4.5) s'écrit :

$$f(r) = A e^{ikr} + B e^{-ikr} \quad (\text{A.4.6a})$$

et celle de (A.4.4) est donnée par :

$$g(r) = \frac{1}{r} (A e^{ikr} + B e^{-ikr}) \quad (\text{A.4.6b})$$

Nous déduisons de (A.4.2) que  $\delta \propto r^{-3}$  et de (A.4.1) que  $g \propto r^{-1}$ . Ces constats impliquent que les constantes A et B sont adimensionnelles.

De plus, l'équation (A.4.3) requiert une onde sortante comme le stipule la condition de rayonnement de Sommerfeld :

$$\begin{aligned} r \left( \frac{\partial g}{\partial r} - ik g \right) &= r \left[ -\frac{A e^{ikr} + B e^{-ikr}}{r^2} + ik \frac{A e^{ikr} - B e^{-ikr}}{r} - ik \frac{A e^{ikr} + B e^{-ikr}}{r} \right] \\ &= r \left[ -\frac{A e^{ikr} + B e^{-ikr}}{r^2} - ik \frac{2B e^{-ikr}}{r} \right] \\ &= \underbrace{-\frac{A e^{ikr} + B e^{-ikr}}{r}}_{\xrightarrow[r \rightarrow \infty]{\rightarrow 0}} - i2k B e^{-ikr} \end{aligned} \quad (\text{A.4.7a})$$

Le premier terme de la dernière équation (A.4.7a) est borné entre  $-1/r$  et  $1/r$ . D'après le théorème des gendarmes, ce terme tend vers zéro lorsque  $r$  tend vers l'infini. Par contre le deuxième terme ne l'est pas; ce qui nous force à prendre :

$$B = 0. \quad (\text{A.4.7b})$$

Ainsi, l'expression de  $g$  se réduit à :

$$g(r) = \frac{1}{r} A e^{ikr} \quad (\text{A.4.7c})$$

Le coefficient A est déterminé à partir de la condition de singularité de l'équation inhomogène de Helmholtz.

Pour se faire, l'équation est intégrée sur un élément de volume sphérique de rayon  $a$  et de centre le point de singularité  $r=0$ . L'équation (A.4.2a) de la définition de la fonction de Dirac devient :

$$\int_V \delta(\mathbf{r}) dV = 1 \quad (\text{A.4.8})$$

Ce qui permet d'écrire (A.4.1) sous la forme :

$$\lim_{a \rightarrow 0} \int_0^a (\nabla^2 + k^2) g(r) 2\pi r^2 dr = 1$$

ou encore, en tenant compte de (A.4.7c) :

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow 0} 4\pi \int_0^a (\nabla^2 + k^2) A \frac{e^{ikr}}{r} r^2 dr &= 1 \\ \Leftrightarrow \lim_{a \rightarrow 0} 4\pi A \left[ \int_0^a \nabla^2 \left( \frac{e^{ikr}}{r} \right) r^2 dr + k^2 \int_0^a r e^{ikr} dr \right] &= 1 \end{aligned} \quad (\text{A.4.9})$$

La deuxième intégrale de (A.4.9) vaut :

$$\begin{aligned} k^2 \int_0^a r e^{ikr} dr &= k^2 \left\{ \left[ \frac{1}{ik} e^{ikr} r \right]_0^a - \frac{1}{ik} \int_0^a e^{ikr} dr \right\} = k^2 \left\{ \frac{a}{ik} e^{ika} - \frac{1}{ik} \left[ \frac{1}{ik} e^{ikr} \right]_0^a \right\} \\ &= k^2 \left\{ \frac{a}{ik} e^{ika} + \frac{1}{k^2} (e^{ika} - 1) \right\} = e^{ika} (1 - ika) - 1 \end{aligned}$$

$$\text{et : } \lim_{a \rightarrow 0} \left( k^2 \int_0^a r e^{ikr} dr \right) = \lim_{a \rightarrow 0} (e^{ika} (1 - ika) - 1) = 0 \quad (\text{A.4.10a})$$

Pour la première intégrale de (A.4.9), nous utilisons le théorème de Gauss comme suit :

$$\begin{aligned} \int_0^a \nabla^2 \left( A \frac{e^{ikr}}{r} \right) 4\pi r^2 dr &= \int_V \nabla \cdot \nabla \left( A \frac{e^{ikr}}{r} \right) dV \underset{\substack{\mathbf{n} \text{ est le vecteur} \\ \text{normale sortant } S}}{=} \int_S \nabla \left( A \frac{e^{ikr}}{r} \right) \cdot \mathbf{n} dS \\ &= \int_S \frac{\partial}{\partial r} \left( A \frac{e^{ikr}}{r} \right) dS = \int_S A e^{ikr} \left( \frac{1 - ikr}{r^2} \right) dS \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{et : } \lim_{a \rightarrow 0} \int_0^a \nabla^2 \left( A \frac{e^{ikr}}{r} \right) 4\pi r^2 dr &= \lim_{a \rightarrow 0} \int_S A e^{ikr} \left( \frac{1 - ikr}{r^2} \right) dS \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} \int_S -\frac{A}{a^2} dS = -4\pi a^2 \frac{A}{a^2} = -4\pi A \end{aligned} \quad (\text{A.4.10b})$$

Remplaçons (A.4.10a & b ) dans (A.4.9) nous aurons :

$$A = -\frac{1}{4\pi} \quad (\text{A.4.11})$$

En fin, si nous remplaçons (A.4.11) dans (A.4.7c), nous obtenons l'expression de la fonction de Green pour  $\mathbf{r}_o = \mathbf{0}$  :

$$g(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi r} e^{ikr} \quad (\text{A.4.12})$$

Qui peut être écrite pour un système de coordonnées arbitraire  $\mathbf{r}_o \neq \mathbf{0}$  sous la forme :

$$g(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_o|) = -\frac{e^{ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}_o|}}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}_o|} \quad (\text{A.4.13})$$

## 4.2 L'équation intégrale de Helmholtz

Nous souhaitons obtenir une représentation intégrale du champ de pression  $p(\mathbf{r})$  satisfaisant l'équation de Helmholtz dans  $V(\mathbf{r})$  limité par  $S_o$  et  $S_1$ .

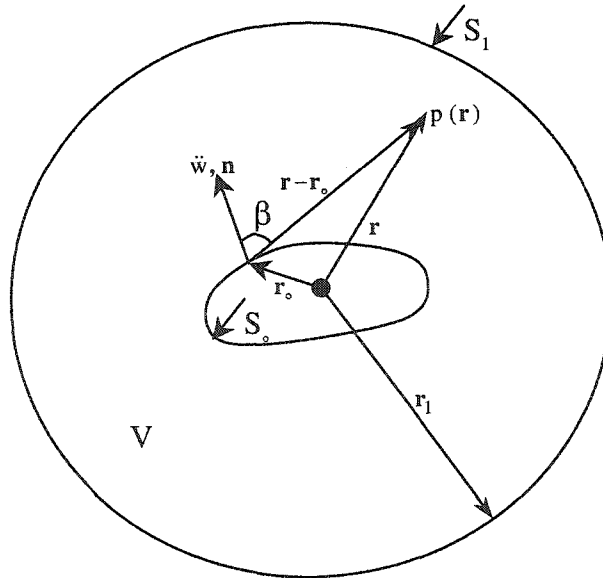


Figure 4.1 : Configuration géométrique utilisée pour construire l'équation intégrale de Helmholtz

Nous avons :

$$(\nabla^2 + k^2)p = 0 \quad \text{dans } V(\mathbf{r}) \quad (\text{A.4.14})$$

La solution de (A.4.14) doit satisfaire la condition d'interface :

$$\frac{\partial p}{\partial n} + \rho \ddot{w} = 0 \quad \text{sur } S_0(\mathbf{r}_0) \quad (\text{A.4.15})$$

Multiplions (A.4.14) par  $g$  et (A.4.1) par  $p$ . La soustraction des deux équations ainsi obtenues donne :

$$p(\mathbf{r}_0) \nabla^2 g(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|) - g(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|) \nabla^2 p(\mathbf{r}_0) = \delta p(\mathbf{r}_0) \quad (\text{A.4.16})$$

$$\text{et} \quad p \nabla^2 g - g \nabla^2 p = p \nabla^2 g - g \nabla^2 p + \nabla p \nabla g - \nabla g \nabla p = \nabla \cdot (p \nabla g - g \nabla p) \quad (\text{A.4.17})$$

Appliquons le théorème de Gauss à (A.4.17), nous aurons :

$$\begin{aligned} \int_V (p \nabla^2 g - g \nabla^2 p) dV &= \int_V \nabla \cdot (p \nabla g - g \nabla p) dV \\ &= \int_{S_1 + S_0} (p \nabla g - g \nabla p) dS \\ &= \int_{S_1 + S_0} \left( p \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} - g \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} \right) dS \end{aligned} \quad (\text{A.4.18})$$

D'autre part, l'intégrale dans  $V(\mathbf{r})$  de (A.4.16) vaut :

$$\int_V \delta p(\mathbf{r}) dV = \varepsilon p(\mathbf{r}) \quad (\text{A.4.19})$$

avec :

$$\begin{aligned} \varepsilon &= 0 \quad \text{pour } \mathbf{r} \notin V(\mathbf{r}) \\ \varepsilon &= 1 \quad \text{pour } \mathbf{r} \in V(\mathbf{r}) \\ \varepsilon &= \frac{1}{2} \quad \text{pour } \mathbf{r} \in S_0 \text{ ou } S_1 \end{aligned} \quad (\text{A.4.20})$$

Par conséquent :

$$p(\mathbf{r}) = \varepsilon \int_{S_0 + S_1} \left( p \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} - g \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} \right) dS(\mathbf{r}_0) \quad (\text{A.4.21})$$

L'intégrale sur  $S_1$  doit s'annuler lorsque cette dernière tend vers l'infini. Cette évidence nous permet de retrouver la condition de rayonnement. En effet, si nous considérons  $S_1$  comme une sphère de rayon  $r_1$  nous aurons :

$$\int_{S_1} \left( p \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} - g \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} \right) dS = \lim_{r_1 \rightarrow \infty} 4\pi r_1^2 \left[ g(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|) \frac{\partial p(\mathbf{r}_1)}{\partial r_1} - p(\mathbf{r}_1) \frac{\partial g(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|)}{\partial r_1} \right] = 0 \quad (\text{A.4.22})$$

Or :  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1| \approx r_1$  lorsque  $r_1$  tend vers l'infini. La fonction de Green donnée par (A.4.13) devient :

$$g(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|) = -\frac{e^{ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|}}{4\pi r_1} \quad (\text{A.4.23a})$$

et

$$\frac{\partial g}{\partial r_1} \approx ik g(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|) \quad (\text{A.4.23b})$$

Si ce résultat (A.4.23b) est substitué dans (A.4.22), nous obtenons :

$$\begin{aligned} & \lim_{r_1 \rightarrow \infty} 4\pi r_1^2 g(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|) \left[ \frac{\partial p(\mathbf{r}_1)}{\partial r_1} - ik p(\mathbf{r}_1) \right] \\ &= \lim_{r_1 \rightarrow \infty} 4\pi r_1 g(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|) \lim_{r_1 \rightarrow \infty} r_1 \left[ \frac{\partial p(\mathbf{r}_1)}{\partial r_1} - ik p(\mathbf{r}_1) \right] = 0 \end{aligned}$$

doit  
être nulle  
d'après (A.4.20)

La fonction sous la première limite de la seconde équation est bornée ; et pour que le résultat des deux limites soit nul il faut obligatoirement avoir :

$$\lim_{r_1 \rightarrow \infty} r_1 \left[ \frac{\partial p(\mathbf{r}_1)}{\partial r_1} - ik p(\mathbf{r}_1) \right] = 0 \quad (\text{A.4.23c})$$

ce qui nous conduit à la condition de rayonnement de Sommerfeld sur la pression. Autrement dit, la pression doit décroître avec  $r_1$ . L'équation (A.4.21) se réduit ainsi à l'intégrale sur la surface radiante  $S_0$ . Si on tient compte de la condition d'interface (A.4.15), le champ de pression donnée par (A.4.21) s'écrit sous la forme :

$$p(\mathbf{r}) = \int_{S_0} \left( p \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} - \rho \ddot{w} g \right) dS(\mathbf{r}_0) \quad (\text{A.4.24})$$

Si on construit une fonction de Green qui satisfait la condition de frontière de Neumann sur  $S_0$  suivante :

$$\frac{\partial G(\mathbf{r}/\mathbf{r}_0)}{\partial n} = 0 \quad \text{sur } S_0(\mathbf{r}_0) \quad (\text{A.4.25})$$

(A.4.25) se simplifiera d'avantage à :

$$p(\mathbf{r}) = -\rho \int_{S_0} \ddot{w} G(\mathbf{r}/\mathbf{r}_0) dS(\mathbf{r}_0) \quad (\text{A.4.26})$$

$$\text{où :} \quad G(\mathbf{r}/\mathbf{r}_0) = g(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|) + \underbrace{\Gamma(\mathbf{r}/\mathbf{r}_0)}_{\text{Solution de (13)}} \quad (\text{A.4.27a})$$

$$\text{et} \quad \frac{\partial \Gamma}{\partial n} = -\frac{\partial g}{\partial n} \quad \text{sur } S_0. \quad (\text{A.4.27b})$$

### 4.3 La formule de Rayleigh pour les sources planes

Nous savons que le champ de pression généré par deux points sources identiques donne lieu à une dérivée nulle par rapport à la direction normale du plan de symétrie des deux points sources [7, 16]. C'est ce que requiert la fonction de Green. La fonction de Green s'écrit alors en coordonnées rectangulaires pour un plan infini  $z = z_0$  :

$$\begin{aligned} g(\mathbf{r}/\mathbf{r}_0) &= \lim_{e \rightarrow 0} [g(x, y, z/x_0, y_0, z_0 - e) + g(x, y, z/x_0, y_0, z_0 + e)] \\ &= 2g(x, y, z/x_0, y_0, z_0) \\ &= 2g(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|) \end{aligned} \quad (\text{A.4.28})$$

Si on remplace cette dernière dans (A.4.26), nous obtenons :

$$p(\mathbf{r}) = \frac{\rho}{2\pi r} \int_{S_0} e^{ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \ddot{w} dS(\mathbf{r}_0) \quad (\text{A.4.29})$$

## **ANNEXE 5**

### **CHAMP DE PRESSION LOINTAIN D'UNE PLAQUE SIMPLEMENT SUPPORTEE**



## CHAMP DE PRESSION LOINTAIN D'UNE PLAQUE SIMPLEMENT SUPPORTEE

Considérons une plaque finie simplement appuyée (SS) sur tous ses côtés. Cette plaque est soumise à une force d'excitation en un point  $(x_0, y_0)$  (voir Fig. A.3.1). L'équation du mouvement est régi par les équations :

$$(\nabla^4 - \mu^4) w = \frac{F}{D} \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) \quad (\text{A.5.1a})$$

Où :

$$D = \frac{E h^3}{12(1 - \nu^2)} \quad (\text{A.5.1b})$$

et :

$$\mu^4 = \frac{\rho h \omega^2}{D} \quad (\text{A.5.1c})$$

La formule de Rayleigh est donnée par ( voir annexe 4 ) :

$$p(\mathbf{r}) = \frac{\rho}{2\pi r} \int_{S_0} e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} \ddot{w}(\mathbf{r}_0) dS(\mathbf{r}_0) \quad (\text{A.5.2})$$

Pour le champ lointain en coordonnées sphériques nous avons :

$$\begin{aligned} |\mathbf{r}-\mathbf{r}_0| &= ((r \cos \varphi \sin \theta - x_0)^2 + (r \sin \varphi \sin \theta - y_0)^2 - (r \cos \theta)^2)^{1/2} \\ &= (r^2 + (x_0^2 + y_0^2) - 2r \sin \theta (x_0 \cos \varphi + y_0 \sin \varphi))^{1/2} \\ &= (r^2 + r_0^2 - 2r \sin \theta (x_0 \cos \varphi + y_0 \sin \varphi))^{1/2} \\ &= (r^2 - 2r \sin \theta (x_0 \cos \varphi + y_0 \sin \varphi))^{1/2} \\ &= r \left(1 - \frac{2}{r} \sin \theta (x_0 \cos \varphi + y_0 \sin \varphi)\right)^{1/2} \\ &= r \left(1 - \frac{1}{r} \sin \theta (x_0 \cos \varphi + y_0 \sin \varphi)\right) \\ &= r - \sin \theta (x_0 \cos \varphi + y_0 \sin \varphi) \end{aligned} \quad (\text{A.5.3})$$

La situation est illustrée par le schéma de la figure A.5.1.

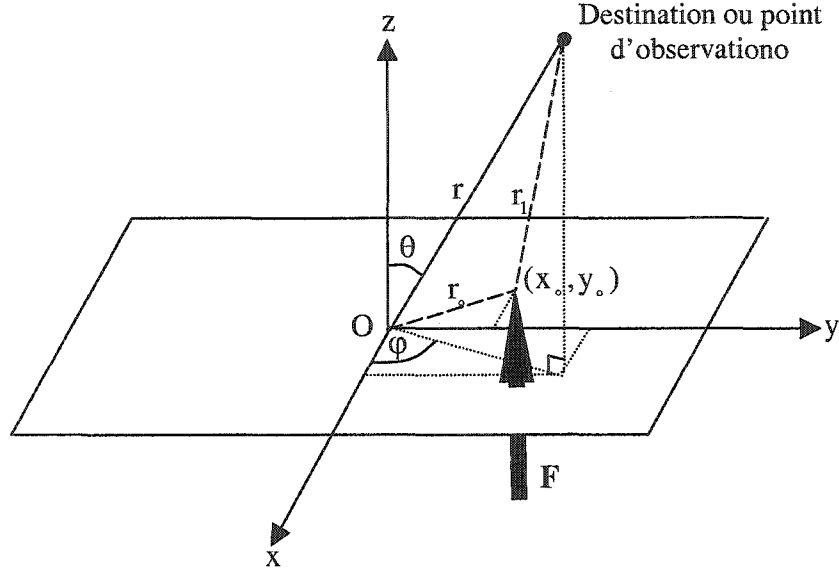


Figure 5.1 : Construction du champ lointain d'une plaque SS.

Dans ce cas (A.5.2) devient :

$$p(r, \theta, \phi) = \frac{\rho e^{ikr}}{2\pi r} \int_{-L_x}^{+L_x} \int_{-L_y}^{+L_y} e^{-ik \sin \theta (x_o \cos \phi + y_o \sin \phi)} \ddot{w}(x_o, y_o) dx_o dy_o \quad (A.5.4)$$

Le double intégrale de  $\ddot{w}$  représente la transformée de Fourier  $-\omega^2 \tilde{w}$ .

$$p(r, \theta, \phi) = -\frac{\rho \omega^2}{2\pi r} e^{ikr} \tilde{w}(\gamma_x, \gamma_y) \quad (A.5.5)$$

avec :

$$\gamma_x = k \cos \phi \sin \theta \quad \text{et} \quad \gamma_y = k \sin \phi \sin \theta \quad (A.5.6a)$$

et

$$\tilde{w}(\gamma_x, \gamma_y) = \int_{-L_x}^{+L_x} \int_{-L_y}^{+L_y} e^{-i\theta(\gamma_x x_o + \gamma_y y_o)} w(x_o, y_o) dx_o dy_o \quad (A.5.6b)$$

Supposons que le déplacement transversal est donné par (voir la solution analytique du déplacement transversal d'une plaque finie en annexe 3) :

$$w(x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} W_{mn} \cos k_m x \cos k_n y = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} w_{mn}(x, y) \quad (A.5.7a)$$

avec :

$$k_m = \frac{m\pi}{2L_x} \quad \text{et} \quad k_n = \frac{n\pi}{2L_y} \quad (\text{A.5.7b})$$

Pour une plaque simplement appuyée, les conditions aux limites sont :

$$w(x,y) = \frac{\partial w(x,y)}{\partial x_i} = 0 \quad \text{pour} \quad |x_i| = L_{x_i} \quad \text{où} \quad i=1,2 \quad (\text{A.5.8a})$$

Elles donnent :

$$\cos k_m L_x = \cos k_n L_y = 0 \Leftrightarrow \cos\left(m\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) = 0 \quad \text{i.e.} \quad m \text{ et } n \text{ impair} \quad (\text{A.5.8b})$$

Du moment que  $m$  et  $n$  sont impaires nous pouvons effectuer le changement suivant :

$$m_1 = \frac{m-1}{2} \quad \text{et} \quad n_1 = \frac{n-1}{2} \quad (\text{A.5.9a})$$

Ce qui donne :

$$k_m = \frac{m\pi}{2L_x} = \left(m_1 + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{L_x} = k_{m_1} \quad \text{et} \quad k_n = \frac{n\pi}{2L_y} = \left(n_1 + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{L_y} = k_{n_1} \quad (\text{A.5.9b})$$

$m_1$  et  $n_1$  sont muets. Nous les remplacerons par  $m$  et  $n$  dans la suite de la démonstration.

$$k_m = \left(m + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{L_x} \quad \text{et} \quad k_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{L_y} \quad (\text{A.5.9c})$$

Remplaçons (A.5.7) dans (A.5.1), nous aurons :

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (k_m^4 + 2k_m^2 k_n^2 + k_n^4 - \mu^4) w_{mn}(x,y) = \frac{F}{D} \delta(x-x_0) \delta(y-y_0) \quad (\text{A.5.10})$$

Multiplions (A.5.10) par  $\cos k_p x \cos k_q y$  nous obtenons :

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_{mn} \cos k_p x \cos k_q y w_{mn}(x,y) = \frac{F}{D} \cos k_p x \cos k_q y \delta(x-x_0) \delta(y-y_0) \quad (\text{A.5.11a})$$

avec :

$$A_{mn} = (k_m^2 + k_n^2)^2 - \mu^4 \quad (\text{A.5.11b})$$

Intégrons (A.5.11a) entre les bordures de la plaque tout en utilisant la propriété d'orthogonalité nous obtenons :

$$\int_{-L_{x_i}}^{+L_{x_i}} \cos k_{m_i} x_i \cos k_{p_i} x_i dx_i = L_{x_i} \delta_{m_i p_i} \quad (\text{A.5.12})$$

et aussi :

$$\int_{-L_{x_i}}^{+L_{x_i}} \delta(x_i - x_{o_i}) f(x_i) dx_i = f(x_{o_i}) \quad (\text{A.5.13})$$

Ce qui donne :

$$\sum_{m=0} \sum_{n=0} A_{mn} \delta_{mp} \delta_{nq} L_x L_y = \frac{F}{D} \cos k_p x_o \cos k_q y_o \quad (\text{A.5.14a})$$

ou encore :

$$A_{mn} L_x L_y = \frac{F}{D} \cos k_m x_o \cos k_n y_o$$

Ce qui permet de tirer l'expression de  $W_{mn}$  :

$$W_{mn} = F \frac{\cos k_m x_o \cos k_n y_o}{D L_x L_y ((k_m^2 + k_n^2)^2 - \mu^4)} \quad (\text{A.5.14b})$$

(A.5.7a) devient :

$$w(x, y) = \sum_{m=0} \sum_{n=0} F \frac{\cos k_m x_o \cos k_n y_o}{D L_x L_y ((k_m^2 + k_n^2)^2 - \mu^4)} \cos k_m x \cos k_n y \quad (\text{A.5.15})$$

La transformée de Fourier de (A.5.15) est :

$$\begin{aligned} \tilde{w}(\gamma_x, \gamma_y) &= \int_{-L_x}^{+L_x} \int_{-L_y}^{+L_y} e^{-i(\gamma_x x + \gamma_y y)} \sum_{m=0} \sum_{n=0} W_{mn} \cos k_m x \cos k_n y dx dy \\ &= \sum_{m=0} \sum_{n=0} W_{mn} \int_{-L_x}^{+L_x} e^{-i\gamma_x x} \cos k_m x dx \int_{-L_y}^{+L_y} e^{-i\gamma_y y} \cos k_n y dy \end{aligned} \quad (\text{A.5.16})$$

La première et la deuxième intégrale sous l'équation (A.5.16) s'écrivent sous la forme :

$$\begin{aligned} J_{m_i} &= \int_{-L_{x_i}}^{+L_{x_i}} e^{-i\gamma_x x_i} \cos k_m x_i dx_i = \int_{-L_{x_i}}^{+L_{x_i}} e^{-i\gamma_x x_i} \frac{e^{ik_m x_i} + e^{-ik_m x_i}}{2} dx_i \\ &= \frac{1}{2} \int_{-L_{x_i}}^{+L_{x_i}} (e^{i(k_m - \gamma_x) x_i} + e^{-i(k_m + \gamma_x) x_i}) dx_i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_{m_i} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{e^{i(k_m - \gamma_x)x_i}}{i(k_m - \gamma_x)} - \frac{e^{-i(k_m + \gamma_x)x_i}}{i(k_m + \gamma_x)} \right]_{-L_{x_i}}^{+L_{x_i}} \\
&= \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{e^{i(k_m - \gamma_x)L_{x_i}}}{i(k_m - \gamma_x)} - \frac{e^{-i(k_m + \gamma_x)L_{x_i}}}{i(k_m + \gamma_x)} \right) - \left( \frac{e^{-i(k_m - \gamma_x)L_{x_i}}}{i(k_m - \gamma_x)} - \frac{e^{i(k_m + \gamma_x)L_{x_i}}}{i(k_m + \gamma_x)} \right) \right\}
\end{aligned} \tag{A.5.17}$$

$$\begin{aligned}
e^{ik_{m_i}L_{x_i}} &= \cos k_{m_i}L_{x_i} + i \sin k_{m_i}L_{x_i} = \cos \frac{m_i\pi}{2} + i \sin \frac{m_i\pi}{2} = i(-1)^{m_i} \\
\text{Or :} \quad e^{-ik_{m_i}L_{x_i}} &= \frac{1}{e^{ik_{m_i}L_{x_i}}} = \frac{1}{i(-1)^{m_i}} = -i(-1)^{m_i}
\end{aligned} \tag{A.5.18}$$

(A.5.17) devient :

$$\begin{aligned}
J_{m_i} &= \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{i(-1)^{m_i} e^{-i\gamma_{x_i}L_{x_i}}}{i(k_{m_i} - \gamma_{x_i})} - \frac{-i(-1)^{m_i} e^{-i\gamma_{x_i}L_{x_i}}}{i(k_{m_i} + \gamma_{x_i})} \right) \right. \\
&\quad \left. - \left( \frac{-i(-1)^{m_i} e^{i\gamma_{x_i}L_{x_i}}}{i(k_{m_i} - \gamma_{x_i})} - \frac{i(-1)^{m_i} e^{i\gamma_{x_i}L_{x_i}}}{i(k_{m_i} + \gamma_{x_i})} \right) \right\}
\end{aligned} \tag{A.5.19a}$$

ou encore :

$$\begin{aligned}
J_{m_i} &= \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{(-1)^{m_i} e^{-i\gamma_{x_i}L_{x_i}}}{k_{m_i} - \gamma_{x_i}} + \frac{(-1)^{m_i} e^{-i\gamma_{x_i}L_{x_i}}}{k_{m_i} + \gamma_{x_i}} \right) + \left( \frac{(-1)^{m_i} e^{i\gamma_{x_i}L_{x_i}}}{k_{m_i} - \gamma_{x_i}} + \frac{(-1)^{m_i} e^{i\gamma_{x_i}L_{x_i}}}{k_{m_i} + \gamma_{x_i}} \right) \right\} \\
&= \frac{(-1)^{m_i}}{2} \left\{ e^{-i\gamma_{x_i}L_{x_i}} \left( \frac{1}{k_{m_i} - \gamma_{x_i}} + \frac{1}{k_{m_i} + \gamma_{x_i}} \right) + e^{i\gamma_{x_i}L_{x_i}} \left( \frac{1}{k_{m_i} - \gamma_{x_i}} + \frac{1}{k_{m_i} + \gamma_{x_i}} \right) \right\} \\
&= \frac{(-1)^{m_i}}{2} \left\{ e^{-i\gamma_{x_i}L_{x_i}} \left( \frac{2k_{m_i}}{k_{m_i}^2 - \gamma_{x_i}^2} \right) + e^{i\gamma_{x_i}L_{x_i}} \left( \frac{2k_{m_i}}{k_{m_i}^2 - \gamma_{x_i}^2} \right) \right\} \\
&= \frac{(-1)^{m_i} k_{m_i}}{k_{m_i}^2 - \gamma_{x_i}^2} \left\{ e^{-i\gamma_{x_i}L_{x_i}} + e^{i\gamma_{x_i}L_{x_i}} \right\} \\
&= \frac{(-1)^{m_i} 2k_{m_i}}{k_{m_i}^2 - \gamma_{x_i}^2} \cos \gamma_{x_i} L_{x_i}
\end{aligned} \tag{A.5.19b}$$

Remplaçons (A.5.19b) dans l'équation (A.5.16) nous aurons :

$$\tilde{w}(\gamma_x, \gamma_y) = \sum_{m=0} \sum_{n=0} \frac{4F(-1)^m (-1)^n k_m k_n \cos k_m x_0 \cos k_n y_0 \cos \gamma_x L_x \cos \gamma_y L_y}{DL_x L_y (k_m^2 - \gamma_x^2)(k_n^2 - \gamma_y^2)((k_m^2 + k_n^2)^2 - \mu^4)} \quad (\text{A.5.20})$$

L'expression de la pression rayonnée en champ lointain est donnée par (A.5.5) après avoir remplacer  $\tilde{w}$  par son expression (A.5.20) :

$$p(r) = \rho \omega^2 F \frac{e^{ikr}}{2\pi r} \sum_{m=0} \sum_{n=0} \frac{4(-1)^m (-1)^n k_m k_n \cos k_m x_0 \cos k_n y_0 \cos \gamma_x L_x \cos \gamma_y L_y}{DL_x L_y (k_m^2 - \gamma_x^2)(k_n^2 - \gamma_y^2)((k_m^2 + k_n^2)^2 - \mu^4)} \quad (\text{A.5.21})$$

Où les expressions de :

- .  $\gamma_x$  et  $\gamma_y$  sont données par (A.5.6a)
- .  $k_m$  et  $k_n$  sont données par (A.5.9c)
- .  $D$  et  $\mu^4$  sont données par (A.5.1b et 1c).

## **ANNEXE 6**

### **CHAMP LOINTAIN DES SOURCES CIRCULAIRES ET RECTANGULAIRES**

## CHAMP LOINTAIN DES SOURCES CIRCULAIRES ET RECTANGULAIRES

L'équation de Helmholtz, la condition de continuité à l'interface fluide-structure et la condition de rayonnement à l'infini pour une géométrie plane bafflée s'écrivent comme suit :

$$\begin{aligned} & \cdot (\nabla^2 + k^2) p = 0 \quad z \geq 0 \\ & \cdot \frac{\partial p}{\partial n} = \begin{cases} \rho \omega^2 w(x, y) & \text{sur } S_{\text{structure}} \\ 0 & \text{Ailleurs} \end{cases} \quad (\text{A.6.1}) \\ & \cdot \text{Condition de Sommerfeld} \end{aligned}$$

La formule de Rayleigh qui satisfait simultanément les équations (A.6.1) a pour expression :

$$p(\mathbf{r}) = \frac{\rho}{2\pi r} \int_{S_0} e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} \ddot{w}(\mathbf{r}_0) dS(\mathbf{r}_0) \quad (\text{A.6.2})$$

### 6.1 Champ lointain et proche du piston circulaire bafflé

Le piston circulaire de rayon  $r_0$  est placé dans un baffle rigide infini, il vibre d'une façon uniforme avec une vitesse normale  $v_n$  au plan de l'écran, soit avec une accélération  $a_n = i\omega v_n$  (voir Fig.A.6.1).

L'origine du repère coïncide avec le centre du disque. Le point source est identifié en coordonnées cylindrique par  $(r_0, \phi_0, z_0 = 0)$ . Le point champ est repéré respectivement en coordonnées cylindriques et sphériques par  $(r, \phi, z)$  et  $(r, \theta, \phi)$ .

Nous avons :

$$\begin{aligned} |\mathbf{r}-\mathbf{r}_0| &= \begin{cases} \left[ r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos(\phi - \phi_0) + z^2 \right]^{1/2} & \text{En coord. Cylindriques} \\ \left[ r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \sin\theta \cos(\phi - \phi_0) \right]^{1/2} & \text{En coord. sphériques} \end{cases} \quad (\text{A.6.3a}) \\ &= r - r_0 \sin\theta \cos(\phi - \phi_0) + O\left(\frac{r_0^2}{r}\right) \end{aligned}$$



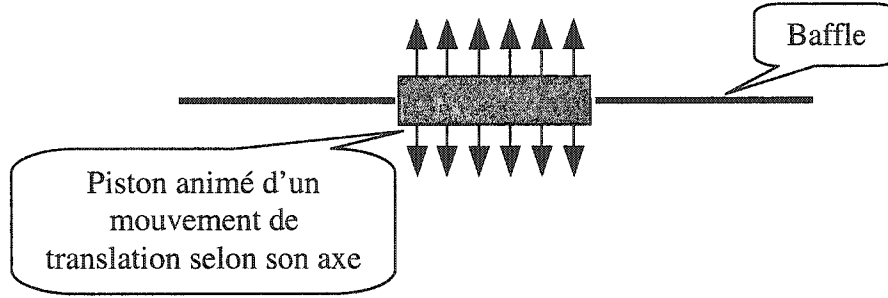


Figure 6.1 : Piston circulaire bafflé

En tenant compte de cette dernière approximation et du fait que l'accélération est uniforme, l'équation de Rayleigh devient:

$$\begin{aligned}
 p(r) &= \frac{\rho \ddot{W}}{2\pi r} \int_0^{r_a} \int_0^{2\pi} e^{ik(r-r_0 \sin\theta \cos\phi_0)} r_0 dr_0 d\phi_0 \\
 &= \frac{\rho \ddot{W}}{2\pi r} \left[ \int_0^{r_a} \int_0^{\pi} e^{ik(r-r_0 \sin\theta \cos\phi_0)} r_0 dr_0 d\phi_0 + \int_0^{r_a} \int_{\pi}^{2\pi} e^{ik(r-r_0 \sin\theta \cos\phi_0)} r_0 dr_0 d\phi_0 \right] \\
 &\stackrel{\text{Chg. } \psi = \phi_0 - \pi}{=} \frac{\rho \ddot{W}}{2\pi r} \left[ \int_0^{r_a} \int_0^{\pi} e^{ik(r-r_0 \sin\theta \cos\phi_0)} r_0 dr_0 d\phi_0 + \int_0^{r_a} \int_0^{\pi} e^{ik(r-r_0 \sin\theta \cos(\Psi+\pi))} r_0 dr_0 d\Psi \right] \\
 &\stackrel{\psi \text{ rempl. par } \phi_0}{=} \frac{\rho \ddot{W}}{2\pi r} \left[ \int_0^{r_a} \int_0^{\pi} e^{ik(r-r_0 \sin\theta \cos\phi_0)} r_0 dr_0 d\phi_0 + \int_0^{r_a} \int_0^{\pi} e^{ik(r+r_0 \sin\theta \cos\phi_0)} r_0 dr_0 d\phi_0 \right] \\
 &= \frac{\rho \ddot{W}}{2\pi r} \left[ \int_0^{r_a} \int_0^{\pi} e^{ikr} (e^{-ikr_0 \sin\theta \cos\phi_0} + e^{ikr_0 \sin\theta \cos\phi_0}) r_0 dr_0 d\phi_0 \right] \\
 &= \frac{\rho \ddot{W}}{\pi r} e^{ikr} \int_0^{r_a} \int_0^{\pi} \cos(kr_0 \sin\theta \cos\phi_0) r_0 dr_0 d\phi_0 \quad \text{avec } r_0 \ll r \text{ et } kr_0^2 \ll r
 \end{aligned} \tag{A.6.3b}$$

De plus, la fonction de Bessel de première espèce est représentée par l'intégrale :

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(x \sin\phi - n\phi) d\phi \tag{A.6.4}$$

Sachant que l'intégrand sous la dernière intégrale de l'équation (A.6.3b) est une fonction paire, nous avons :

$$J_0(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(x \sin\phi) d\phi \tag{A.6.5}$$

Ce qui permet de simplifier (A.6.3b) à :

$$p(r, \theta) = \frac{\rho \ddot{W} e^{ikr}}{r} \int_0^{r_a} J_0(kr_0 \sin\theta) r_0 dr_0 \quad \text{avec } r_0 \ll r \text{ et } kr_0^2 \ll r \tag{A.6.6}$$

L'intégrale de l'équation (A.6.6) est facile à calculer puisque :  $J_0'(x) = -J_1(x)$ .

L'expression du champ de pression lointain est enfin donnée par :

$$p(r, \theta) = \frac{\rho r_a \ddot{W} e^{ikr} J_1(k r_a \sin \theta)}{k r \sin \theta} \quad \text{avec } r_a \ll r \text{ et } k r_a^2 \ll r \quad (\text{A.6.7})$$

La condition de Neumann pour ce cas de problème est :

$$\frac{dp}{dr} = -\rho \omega^2 W \quad (\text{A.6.8})$$

L'expérience de la pression sur l'axe du piston peut être aussi calculée analytiquement.

En effet :

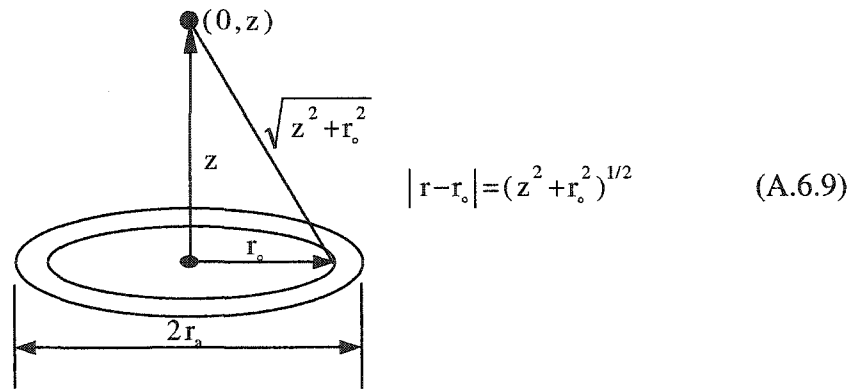


Figure 6.2 : Pression sur l'axe du piston

La formule de Rayleigh pour ce point d'observation se simplifie à :

$$p(0, z) = \rho \ddot{W} \int_0^{r_a} \frac{e^{ik(z^2 + r_o^2)^{1/2}}}{(z^2 + r_o^2)^{1/2}} r_o dr_o \quad (\text{A.6.10})$$

Le changement de variable :  $s = (z^2 + r_o^2)^{1/2}$  permet d'alléger l'équation (A.6.10) à :

$$\begin{aligned} p(0, z) &= \rho \ddot{W} \int_z^{(z^2 + r_a^2)^{1/2}} e^{iks} ds \\ &= -\frac{i\rho \ddot{W}}{k} (e^{ik(z^2 + r_a^2)^{1/2}} - e^{ikz}) \end{aligned} \quad (\text{A.6.11})$$

Le module de la pression vaut alors :

$$\begin{aligned}
|p(0, z)| &= 2\rho c \dot{W} \left| \sin \frac{k}{2} \left[ (z^2 + r_o^2)^{1/2} - z \right] \right| \\
&= 2\rho c \dot{W} \left| \sin \frac{k}{2} z \left[ \left( 1 + \frac{r_o^2}{z^2} \right)^{1/2} - 1 \right] \right| \stackrel{r_o \rightarrow 0}{z} \approx 2\rho c \dot{W} \left| \sin \frac{k r_o^2}{4z} \right|
\end{aligned} \quad (\text{A.6.12})$$

Nous parvenons finalement à l'expression du champ de pression sur l'axe du piston en remplaçant le sinus par son argument.

$$|p(0, z)| = \rho c \dot{W} \frac{k r_o^2}{2z} \quad z \gg r_o \quad \text{et} \quad k r_o^2 \ll z \quad (\text{A.6.13})$$

La pression au centre du piston est donnée à partir de la première égalité de l'équation (A.6.12).

$$|p(0, z)| = 2\rho c \dot{W} \left| \sin \frac{k r_o}{2} \right| \quad z=0 \quad (\text{A.6.14})$$

## 6.2 Champ lointain d'une source rectangulaire bafflé

Considérons un radiateur rectangulaire fini de dimension  $2L_x$  ( $-L_x \leq x \leq L_x$ ),  $2L_y$  ( $-L_y \leq y \leq L_y$ ) et  $h$  ( $-h/2 \leq z \leq h/2$ ), placé dans un baffle ( $z=0$ ) et sur lequel est prescrite une distribution d'accélération  $\ddot{w}(x_o, y_o)$ . La construction de  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_o|$  en coordonnées sphériques est :

$$\begin{aligned}
|\mathbf{r} - \mathbf{r}_o| &= \left[ r^2 + r_o^2 - 2r r_o \sin \theta \cos(\phi - \phi_o) \right]^{1/2} \\
&= \left[ r^2 + r_o^2 - 2r x_o \sin \theta \cos \phi - 2r y_o \sin \theta \sin \phi \right]^{1/2} \\
&= r - r x_o \sin \theta \cos \phi - r y_o \sin \theta \sin \phi + O\left( \frac{(x_o^2 + y_o^2)}{r} \right)
\end{aligned} \quad (\text{A.6.15})$$

La formule de Rayleigh prend la forme suivante :

$$p(r, \theta, \phi) = \frac{\rho e^{ikr}}{2\pi r} \int_{-L_x}^{L_x} \int_{-L_y}^{L_y} \ddot{w}(x_o, y_o) e^{-ik \sin \theta (x_o \cos \phi + y_o \sin \phi)} dx_o dy_o \quad (\text{A.6.16})$$

Le double intégrale représente la transformée de Fourier de la distribution d'accélération. Ce qui permet d'écrire l'équation (A.6.16) sous la forme compacte suivante :

$$p(r, \theta, \phi) = \frac{\rho e^{ikr}}{2\pi r} \tilde{w}(\gamma_x, \gamma_y) \quad (\text{A.6.17a})$$

avec :

$$\gamma_x = k \sin \theta \cos \phi, \quad \gamma_y = k \sin \theta \sin \phi \quad (\text{A.6.17b})$$

Notons que la longueur d'onde correspond à la résultante des deux nombres d'onde  $\gamma_x$  et  $\gamma_y$  est :

$$\frac{2\pi}{(\gamma_x^2 + \gamma_y^2)^{1/2}} = \frac{2\pi}{k \sin \theta} = \frac{\lambda}{\sin \theta} \quad (\text{A.6.17c})$$

Elle représente la trace dans le plan de la source d'une onde plane se dirigeant dans la direction d'une génératrice du cône  $\theta$ .

### 6.2.1 Champ lointain d'un piston rectangulaire bafflé

Pour illustrer l'utilisation de la formule de Rayleigh (équation (A.6.16)), nous allons considérer un piston rectangulaire vibrant avec une accélération constante  $\ddot{W}$ .

Du fait que la fonction sinus est impair et en utilisant la formule d'Euler, la transformée de  $\ddot{w}(x_o, y_o)$  donne :

$$\begin{aligned} \tilde{w}(\gamma_x, \gamma_y) &= \ddot{W} \int_{-L_x}^{L_x} \int_{-L_y}^{L_y} e^{-i(\gamma_x x_o + \gamma_y y_o)} dx_o dy_o \\ &= \ddot{W} \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} (e^{i\gamma_x x_o} - e^{-i\gamma_x x_o}) (e^{i\gamma_y y_o} - e^{-i\gamma_y y_o}) dx_o dy_o \\ &= 4 \ddot{W} \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \cos \gamma_x x_o \cos \gamma_y y_o dx_o dy_o. \end{aligned}$$

ou encore :

$$\begin{aligned}
\tilde{w}(\gamma_x, \gamma_y) &= 4 \ddot{W} \left[ \frac{\sin \gamma_x x_o}{\gamma_x} \right]_0^{L_x} \left[ \frac{\sin \gamma_y y_o}{\gamma_y} \right]_0^{L_y} \\
&= 4 \ddot{W} \frac{\sin \gamma_x L_x \sin \gamma_y L_y}{\gamma_x \gamma_y}
\end{aligned} \tag{A.6.18}$$

Sachant que la fonction de Bessel d'ordre zéro  $J_o$  est définie comme :

$$\begin{cases} J_o(x) = \frac{\sin x}{x} & \text{et } J_o(0) = 1 \\ J_o'(x) = (\cot x - x^{-1}) J_o(x) \end{cases} \tag{A.6.19}$$

En tenant compte de cette définition, et après avoir remplacer (A.6.18) dans (A.6.17), nous aboutissons à l'expression de la pression en champ lointain pour le piston rectangulaire :

$$p(r, \theta, \phi) = \frac{2L_x L_y \rho \ddot{W} e^{ikr}}{\pi r} J_o(kL_x \sin \theta \cos \phi), J_o(kL_y \sin \theta \sin \phi) \tag{A.6.20a}$$

La condition de Neumann pour ce cas de problème est :

$$\frac{dp}{dr} = -\rho \omega^2 W \tag{A.6.20b}$$

### 6.2.2 Champs lointain d'une source rectangulaire à accélérations

L'accélération de la source rectangulaire varie d'élément en élément non seulement en phase mais aussi en amplitude en vue d'exciter les ondes stationnaires. Nous traitons dans ce qui suit le cas d'une configuration paire en  $x$  et  $y$ .

$$\ddot{w}(x_o, y_o) = \ddot{W} \cos k_n x \cos k_m y \quad |x| \leq L_x, |y| \leq L_y \tag{A.6.21a}$$

$$\ddot{w}(x_o, y_o) = 0 \quad |x| > L_x, |y| > L_y \tag{A.6.21b}$$

Les nombres  $k_n$  et  $k_m$  sont choisis de façon à satisfaire la condition d'appuie simple de la plaque sur toutes ses périphéries. Ils sont restreints à :

$$\begin{aligned}
k_n L_x &= (n + \frac{1}{2}) \pi \quad n = 0, 1, 2, \dots \\
k_m L_y &= (m + \frac{1}{2}) \pi \quad m = 0, 1, 2, \dots
\end{aligned} \tag{A.6.22}$$

La transformée de l'accélération est calculée en substituant l'expression de l'accélération donnée par (A.6.21) dans la définition de la transformée de Fourier de  $\ddot{w}$ .

$$\begin{aligned}
 \tilde{\ddot{w}}(x_o, y_o) &= \int_{-L_x}^{L_x} \int_{-L_y}^{L_y} \ddot{w}(x_o, y_o) e^{-i(\gamma_x x_o + \gamma_y y_o)} dx_o dy_o \\
 &= \ddot{W} \int_{-L_x}^{L_x} \cos k_n x e^{-i\gamma_x x_o} dx_o \int_{-L_y}^{L_y} \cos k_m y e^{-i\gamma_y y_o} dy_o \\
 &= \ddot{W} \int_{-L_x}^{L_x} \cos k_n x \cos \gamma_x x_o dx_o \int_{-L_y}^{L_y} \cos k_m y \cos \gamma_y y_o dy_o \\
 &= \frac{4 \ddot{W} k_n k_m (-1)^{n+m} \cos \gamma_x L_x \cos \gamma_y L_y}{(k_n^2 - \gamma_x^2)(k_m^2 - \gamma_y^2)}
 \end{aligned} \tag{A.6.23}$$

la contribution de  
la partie imaginaire  
est nulle

Le champ lointain se déduit automatiquement à partir de l'équation (A.6.17a) :

$$p(r, \theta, \phi) = \frac{2\rho \ddot{W} e^{ikr} k_n k_m (-1)^{n+m} \cos(k L_x \sin \theta \cos \phi) \cos(k L_y \sin \theta \sin \phi)}{\pi r (k_n^2 - k^2 \sin^2 \theta \cos^2 \phi) (k_m^2 - k^2 \sin^2 \theta \sin^2 \phi)} \tag{A.6.24a}$$

La condition de Neumann pour ce cas de problème est :

$$\frac{dp}{dr} = -\rho \omega^2 W \cos k_n x \cos k_m y \tag{A.6.24b}$$

Où  $k_m$  et  $k_n$  sont données par l'équation (A.6.22).

### 6.3 Source sphérique pulsante

On considère l'équation de Helmholtz relative au champ sonore rayonné par une source sphérique isotrope. En coordonnées sphériques, l'opérateur de Laplace s'écrit :

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \nabla_\sigma^2 \tag{A.6.25a}$$

et

$$\nabla_\sigma^2 = \frac{1}{r^2} \left[ \cot \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right] \tag{A.6.25b}$$

De la symétrie de la source on déduit :

$$p_{,\theta} = p_{,\phi} = 0 \tag{A.6.25c}$$

Ce qui réduit l'équation de Helmholtz à :

$$\left( \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} + k^2 \right) p(r) = 0 \quad (\text{A.6.26a})$$

ou encore :

$$\frac{1}{r} \frac{d^2(rp)}{dr^2} + k^2 p = 0 \quad (\text{A.6.26b})$$

Si nous considérons comme fonction inconnue la combinaison  $rp(r)$ , la solution s'écrira :

$$rp(r) = A_+ e^{ikr} + A_- e^{-ikr} \quad (\text{A.6.27})$$

Nous nous intéressons uniquement aux ondes qui s'éloignent de la source (terme  $e^{ikr}$ ), avec la vitesse du son. L'autre terme  $e^{-ikr}$  représente des ondes qui convergent vers la source. Dans le cas d'un système qui ne comprend qu'une seule source placée à l'origine des coordonnées, ce terme ne correspond pas à une réalité physique.

La solution spatiale est donc de la forme :

$$p(r) = A_+ \frac{e^{ikr}}{r} \quad (\text{A.6.28a})$$

La solution spatio-temporelle est de la forme :

$$p(r) = A_+ \frac{e^{ik(r-ct)}}{r} \quad (\text{A.6.28b})$$

Pour déterminer la constante  $A_+$  nous utilisons l'équation de la condition aux frontières du champ sonore associé à la surface de la sphère :

$$\nabla p \cdot \mathbf{n} = p_{,n} = \rho \ddot{w} \cdot \mathbf{n} = i\rho \omega \dot{w} \cdot \mathbf{n} \quad (\text{A.6.29a})$$

Le déplacement de la source est purement radiale, ce qui permet de réduire l'opérateur  $\nabla$  de l'équation (A.6.29) à sa seule composante radiale. La condition aux frontières peut donc être écrite sous la forme différentielle suivante :

$$\frac{\partial p}{\partial r} = i\rho \omega \dot{w} \quad \text{pour } r=r_a \quad (\text{A.6.29b})$$

Quand nous substituons (A.6.28a) dans (A.6.29b) nous obtenons la relation donnant l'expression de  $A_+$  :

$$A_+ = \frac{i\rho\omega r_a^2 \dot{w}}{ik - \frac{1}{r_a}} e^{-ikr_a} \quad (\text{A.6.29c})$$

La pression prend finalement la forme :

$$p(r) = \frac{i\rho\omega r_a^2 \dot{w}}{r(ikr_a - 1)} e^{ik(r-r_a)} = \frac{\rho\omega^2 r_a^2 w (1+ikr_a)}{r(k^2 r_a^2 + 1)} e^{ik(r-r_a)} \quad (\text{A.6.30a})$$

La condition de Neumann pour ce cas de problème est :

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{\rho\omega^2 r_a w}{(ikr_a - 1)} \left(ikr - \frac{1}{r^2}\right) e^{ik(r-r_a)} \quad (\text{A.6.30b})$$



## **ANNEXE 7**

### **FORMULAIRE MATHEMATIQUES**

## FORMULAIRE MATHEMATIQUES

### 7.1 Fonction de Dirac

Par définition si  $f(x)$  étant une fonction bien définie au point  $x = x_0$  alors :

$$\int f(x) \delta(x - x_0) dx = f(x_0) \quad (\text{A.7.1})$$

Nous déduisons que :

$$\begin{aligned} \delta(x - x_0) &= 0 && \text{si } x \neq x_0 \\ &= +\infty && \text{si } x = x_0 \\ &\text{et} \end{aligned} \quad (\text{A.7.2})$$

$$\int \delta(x - x_0) dx = 1$$

La fonction  $\delta(x - x_0)$  peut être considérée comme la limite d'une fonction qui ne prend de valeur que dans un voisinage de  $x_0$  où elle prend un maximum positif très marqué.

Propriétés principales de la fonction Dirac  $\delta(x)$

$$\begin{aligned} \delta(ax) &= \frac{1}{|a|} \delta(x) \\ f(x) \delta(x - a) &= f(a) \delta(x - a) \\ \int \delta^{(n)}(x) f(x) dx &= (-1)^{(n)} f^{(n)}(0) \\ \int \delta^{(m)}(x - y) \delta^{(n)}(y - a) dy &= \delta^{(n+m)}(x - a) \\ x^{n+1} \delta^{(n)}(x) &= 0 \\ \delta^{(n)}(x) &= (-1)^{(n)} \delta^{(n)}(-x) \\ \int \int \delta(x - x_0) f(x) \delta(y - y_0) g(y) dx dy &= f(x_0) g(y_0) \end{aligned} \quad (\text{A.7.3})$$

### 7.2 Fonction de Bessel de Hankel [16]

#### 7.2.1 Fonction de Bessel

La solution générale de :

$$\frac{d^2 y(x)}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy(x)}{dx} + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right) y(x) = 0 \quad (\text{A.7.4})$$

vérifie les équations différentielles suivantes :

$$\begin{aligned}
 y(x) &= A J_n(x) + B J_{-n}(x) & \forall n \in \mathbb{N}^* \\
 y(x) &= A J_n(x) + B Y_n(x) & \forall n \in \mathbb{Z} \\
 y(x) &= A J_n(x) + B J_n(x) \int \frac{dx}{x J_n^2(x)} & \forall n \in \mathbb{Z}
 \end{aligned} \tag{A.7.5}$$

$A$  et  $B$  sont des constantes et

$J_n$  et  $Y_n$  s'appellent respectivement fonction de Bessel de première et de second espèce.

*Formule récurrente :*

$$\begin{aligned}
 x J_n'(x) &= n J_n(x) - x J_{n+1}(x) \\
 x J_n'(x) &= -n J_n(x) + x J_{n-1}(x) \\
 2 J_n'(x) &= J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x) \\
 \frac{d}{dx} (x^n J_n(x)) &= -x^{-n} J_{n+1}(x) \\
 J_0'(x) &= -J_1(x)
 \end{aligned} \tag{A.7.6}$$

*Relation particulière :*

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{\pm i(x \sin \theta - n\theta)} d\theta$$

### 7.2.2 Fonction de Hankel de première et seconde espèce

$$\begin{aligned}
 H_n^{(1)}(x) &= J_n(x) + i Y_n(x) & \text{et} & & H_{-n}^{(1)}(x) &= e^{in\pi} H_n^{(1)}(x) \\
 H_n^{(2)}(x) &= J_n(x) - i Y_n(x) & \text{et} & & H_{-n}^{(2)}(x) &= e^{-in\pi} H_n^{(2)}(x)
 \end{aligned} \tag{A.7.7}$$

$Y_n(x)$ ,  $H_n^{(1)}(x)$  et  $H_n^{(2)}(x)$  satisfont les mêmes relations récurrentes que  $J_n$ .

### 7.3 Fonctions de Bessel sphériques [16]

Elles constituent la solution de l'équation différentielle suivante :

$$x y''(x) + 2x y'(x) + [x^2 - n(n+1)] y(x) = 0 \quad n \in \mathbb{Z} \tag{A.7.8}$$

▸ Fonction de Bessel sphérique de 1<sup>ère</sup> espèce :

$$j_n(x) = \sqrt{\frac{1}{2} \pi/x} J_{n+1/2}(x) \quad (\text{A.7.9})$$

▸ Fonction de Bessel sphérique de 2<sup>ème</sup> espèce :

$$y_n(x) = \sqrt{\frac{1}{2} \pi/x} Y_{n+1/2}(x) \quad (\text{A.7.10})$$

▸ Fonction de Hankel sphérique :

$$h_n^{(1)}(x) = j_n(x) + i y_n(x) = \sqrt{\frac{1}{2} \pi/x} H_{n+1/2}^{(1)}(x) \quad (\text{A.7.11})$$

$$h_n^{(2)}(x) = j_n(x) - i y_n(x) = \sqrt{\frac{1}{2} \pi/x} H_{n+1/2}^{(2)}(x)$$

*Développements asymptotiques* ( $x \rightarrow \infty$  et  $n$  réel) :

$$\begin{aligned} J_n(x) &\cong \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos \left[ x - (2n+1) \frac{\pi}{4} \right] \\ Y_n(x) &\cong \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin \left[ x - (2n+1) \frac{\pi}{4} \right] \\ H_n^{(1)}(x) &\cong \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{i \left[ x - (2n+1) \frac{\pi}{4} \right]} \\ H_n^{(2)}(x) &\cong \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{-i \left[ x - (2n+1) \frac{\pi}{4} \right]} \end{aligned} \quad (\text{A.7.12})$$

*Développements limites* ( $x \ll 1$  et  $n$  réel) :

$$\begin{aligned} J_n(x) &\cong \frac{1}{n!} \left( \frac{x}{2} \right)^n \quad \text{pour } n \neq 0; J_0(0) \approx 1 \\ Y_n(x) &\cong -\frac{(n-1)!}{n!} \left( \frac{2}{x} \right)^n \quad \text{pour } n \neq 0; Y_0(0) \approx \frac{2}{\pi} \ln \left( \frac{x}{2} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.7.13})$$

La fonction de Bessel sphérique de 1<sup>ère</sup> espèce et d'ordre zéro satisfait :

$$\begin{aligned} j_0(z) &= \frac{\sin z}{z} \\ j_0(0) &= 1 \\ j_0'(z) &= (\cot z - z^{-1}) j_0(z) \end{aligned} \quad (\text{A.7.14})$$

#### 7.4 Orthogonalité des fonctions sinus et cosinus

Les fonctions sinus et cosinus vérifient :

$$\begin{aligned}
 \int_T^{T+2\pi} \sin pt \sin qt \, dt &= \pi \delta_{p,q} \\
 \int_T^{T+2\pi} \cos pt \cos qt \, dt &= \pi \delta_{p,q} \\
 \int_T^{T+2\pi} \sin pt \cos qt \, dt &= 0
 \end{aligned}
 \tag{A.7.15}$$

#### 7.5 Transformée de Hankel

Le transformée de Hankel est définie par :

$$\tilde{f}(\gamma) = \int_0^\infty f(r) J_0(\gamma r) r \, dr
 \tag{A.7.16}$$

Le transformée inverse de Hankel est définie par :

$$f(r) = \int_0^\infty \tilde{f}(\gamma) J_0(\gamma r) \gamma \, d\gamma
 \tag{A.7.17}$$

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] M. Ali Hamdi, "*Formulation variationnelle par équations intégrales pour le calcul de champs Acoustiques linéaires proches et lointains*", Thèse de Doctorat, Université de technologie de Compiègne, 1982.
- [2] J. Ben Mariem, "*Etude du couplage élasto-acoustique par éléments finis de surface*", Thèse de Doctorat, Université de technologie de Compiègne, 1984.
- [3] G. C. Everstin, F.M. Henderson, "*Coupled finite element boundary element approach for fluid-structure interaction*", J. Acoust. Soc. Am. 87, 1938-1947 (1990).
- [4] Bendali . "*Approximation par Eléments finis de surface de problème de diffraction d'onde électromagnétiques*" Thèse d'Etat, Université Paris VI, 1984.
- [5] T. Takahagi, M. Nakai, Y. Tamai, "*Near field sound radiation from simply supported rectangular plates*" J. of Sound and Vibration (1995) 185(3), 455-471.
- [6] A. T. Petersson, "*Efficiency of annularly distributed moment and force excitation regarding structural acoustic power transmission to plate-like structures*" J. of Sound and Vibration (1994) 176(5), 625-639.
- [7] M. C. Junger, D. Feit, "*Sound, Structures, and Their interaction*" 1972 by The MIT Press Cambridge, Massachusetts, and London, England.
- [8] K. Grosh, P. M. Pinsky, "*Galerkin Generalized least squares finite element methods for time-harmonic structural acoustics*" Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, March 19, 1996

- [9] M. P. Do Carmo "*Differential Geometry of curves and surfaces*" 1976 by Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, New Jersey.
- [10] S. Timoshenko "*Theory of Plates and Shells*" McGraw Hill Book company, Inc. New York and London 1940.
- [11] X. Antoine "*Conditions de radiation sur le bord*" Thèse de Doctorat Université de Pau et des pays de l'Adour, 1997.
- [12] R. Tezaur, A. Macedo, C. Farhat, and R. Djellouli, "*Three-dimensional finite element calculations in acoustic scattering using arbitrarily shaped convex artificial boundaries*" Int. J. Numer. Meth. Engng. 2002 ; 53:1461-1476.
- [13] X. Antoine "*Fast approximation of a time-harmonic scattered field using the on-surface radiation condition method*" IMA J. App. Math. (1997) 66, 83-110.
- [14] Colton, R. Kress, "*Inverse Acoustic in Electromagnetic Scattering Theory*" Applied Mathematical Sciences, Vol.93, Springer, Berlin, 1992.
- [15] C.Lesueur, "*Rayonnement acoustique des structures*" Editions Eyrolles 1988.
- [16] M. C. Junger, M. Perulli, "*Éléments d'acoustique physique*" Maloine 1978.
- [17] F.Ihlenburg, "*Finite Element Analysis of Acoustic Scattering*" Applied Mathematical Sciences 132. 1998 Springer-Verlag New York, Inc.
- [18] L. J. Ignacio, "*Boundary element methods in fluid-structure problems. Application to acoustic wave scattering*" Alberto Aguilera, 23 - 28015

- [19] X. Antoine, H. Barucq, and A. Bendali, "*Bayliss- Turkel like radiation condition on surfaces of arbitrary shape*" J. Math. Anal. Appl. 229 (1999), 184-211.
- [20] Bayliss, M. Gunburger and E. Turkel, "*Boundary conditions for the numerical solution of elliptic equations in exterior regions*" SIAM J. Appl. Math. 42 (1982), 430-451.
- [21] J.P. Berenger, "*A Perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves*" J. Comput. Phys. 114 (1994), 185-200.
- [22] R. Djellouli, C. Farhat, A. Macedo, R. Tezaur, "*Finite element solution of Two-Dimensional acoustic scattering problems using arbitrarily shaped convex artificial boundaries*", Journal of Computational Acoustics, Vol.8, No. 1 (2000) pp.81-99
- [23] Enquist and A. Majda, "*Absorbing boundary conditions for the numerical simulation of waves*" Math. Of Comput. 31 (1977), 629-651.
- [24] K. Feng, in Proceedings, International Congress of Mathematicians, Warsaw Poland, (1983), p.1439.
- [25] Harari and T. J. R. Hughes, "*Studies of domain based-formulations for computing exterior problems of acoustics*" Int. J. Num. Meth. Eng. 37 (1994), 2935-2950.
- [26] I. Harari, K. Grosch, T. J. R. Hughes, M. Malhotra, P.M. Pinsky, J. R. Stewart and L. L. Thompson, "*Recent Developpments in Finite Element Methods for Structural Acoustics*" Archives of Computational Methods in Engineering Vol. 3, 2 y 3 , 131-311 (1996).



- [27] F. Ihlenburg and I. Babuška, "*Finite element solution of the Helmholtz equation with high wave number. I. The h-version of the FEM*" *Comp. Math. Appl.* 30 (1995), 9-37.
- [28] M. Magolu Monga Made, "*Incomplete factorization based preconditionings for solving the Helmholtz equation*" *Int. J. Numer. Meth. Engng* 50 (2001), 1077-1101.
- [29] J.B. Keller and D. Givoli, "*Exact non reflecting boundary condition*" *J. Comput. Phys.* 82 (1989), 172-192.
- [30] A. Oberai and P. M. Pinsky, "*A numerical comparaison of finite element methods for the Helmholtz equation*" *J. Comput. Acoustics*, 8 (2000), 211-221.
- [31] Y. Saad, M. H. Schultz, "*A Generalized minimal residual algorithm for solving non-symmetric linear system*" *SIAM J. Appl. Sci. Stat. Comp.* 7 (1986), 856-869.
- [32] Y. Saad, "*ILUT: A dual threshold incomplete ILU factorization*" *Numerical Linear Algebra with Applications*, 1:387-402, 1994.
- [33] A. Zebic, "*Equation de Helmholtz : étude numérique de quelques préconditionneurs pour la méthode GMRES*" INRIA, Rapport de Recherche no. 182 (1992).
- [34] K. Sakagani, K. Michishita, M. Morimoto, Y. Kitamura "*Sound Radiation from a Baffled Elastic Plate Strip of Infinite Length with Various Concentrated Excitation Forces*" *Applied Acoustics*, Vol. 55, No. 3, pp. 181-202, 1998.

- [35] G. Barton "*Elements of Green's Functions and Propagation*" Oxford University Press, New York, USA, 1989.
- [36] R.Kechroud, A.Soulaimani, Y.Saad, S. Gowda "*Preconditioning techniques for the solution of the Helmholtz equation by the finite element method*" , Accepted in Mathematics and Computers, Appeared in The Special Issue On Wave Phenomena in physics and Engineering : New Models, Algorithms, and Applications, pp1-25, 2003.
- [37] A. Soulaïmani, A. BenElHajAli, Z. Feng "*Nonlinear computational Aeroelasticity : Formulation and solution Algorithms*", NATO Applied Vehicle Technology "AVT" RTO-MP-089-45, Symposium, Paris, April 22-26, 2002.
- [38] D.Givoli, Journal of Computational Physics, Vol. 94, n° 1, 1991.